

Istruzioni Generali

- Per rispondere a un problema⁽¹⁾ occorre indicare sul cartellino delle risposte un numero intero compreso tra 0000 e 9999, o comunque una successione di 4 cifre. Occorre sempre e comunque compilare tutte le 4 cifre, eventualmente aggiungendo zeri iniziali.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo oppure il problema non ha esattamente una soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera; in altre parole, in ordine da sinistra a destra, la cifra delle migliaia, seguita da quella delle centinaia, poi quella delle decine, infine le unità.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, si indichi la sua parte intera.
- Si ricorda che
 - a) la **parte intera** di un numero reale x è il più grande intero minore o uguale ad x ; si scrive $\lfloor x \rfloor$ —ad esempio $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 10 \rfloor = 10$, $\lfloor \sqrt{17} \rfloor = 4$;
 - b) il **successivo** del numero intero n è il numero $n + 1$ e i due numeri sono detti **consecutivi**;
 - c) il **fattoriale** del numero intero n è il prodotto di tutti i numeri interi da 1 fino a n ; si scrive $n!$ —ad esempio $1! = 1$, $5! = 120$, $6! = 720$;
 - d) un **quadrato perfetto** è un numero intero che è quadrato di un numero intero—ad esempio 16 è un quadrato perfetto, 22 non è un quadrato perfetto;
 - e) una lista è **palindroma** se, letta da destra a sinistra, produce la stessa lista—ad esempio radar è palindroma; drone non è palindroma; 2020 non è palindromo; 2002 è palindromo.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:
 $\sqrt{2} = 1,4142$ $\sqrt{3} = 1,7321$ $\sqrt{5} = 2,2360$ $\pi = 3,1415$.

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine ultimo per la scelta del problema Jolly (dopo verrà assegnato d'ufficio il primo problema della lista). La scelta deve essere effettuata attraverso il modulo di consegna.
- **30 minuti dall'inizio**: termine ultimo per fare domande sul testo. Le domande devono essere rivolte solo dai capitani attraverso il canale previsto.
- **100 minuti dall'inizio**: termine dell'incremento dei punteggi dei problemi.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

BUON
DIVERTIMENTO!

⁽¹⁾ L'autore di un problema è indicato prima del testo.

**1. Sull'isola**

Giuseppe Rosolini

Sull'isola dei cavalieri e dei furfanti, un cavaliere dice sempre la verità; un furfante dice sempre il falso. In una piazza dell'isola, ci sono diecimila persone. Alla domanda «Quanti sono tra voi i cavalieri?», tremila rispondono «Siamo tutti e diecimila cavalieri», tremila rispondono «Siamo tutti e diecimila furfanti», quattromila rispondono «I cavalieri presenti sono quattromila». Quanti sono al massimo i cavalieri?

2. Due dadi

Giuseppe Rosolini

Io lancia un dado non truccato, e copro il numero che compare sulla faccia superiore del dado. Lui lancia un altro dado non truccato, del tutto uguale al precedente; pure Lui copre il numero che compare sulla faccia superiore del dado. Su entrambi i dadi si vede una faccia laterale: in ciascun caso si vede che è quella con il singolo puntino. Qual è la probabilità che sia uscito lo stesso numero su entrambi i dadi?

[Dare come risposta la probabilità moltiplicata per 10000.]

3. Magicamente Andrea Macco e Giuseppe Rosolini

Un **quadrato magico** è una tabella con quattro righe e quattro colonne che ha la proprietà che la somma dei numeri presenti in ogni riga, in ogni colonna e nelle due diagonali è sempre uguale. Nel quadrato magico

12	7	A	B
C	D	16	E
	11		10
1		4	

compaiono tutti i numeri da 1 incluso a 16 incluso, ma alcuni numeri sono stati coperti.

Quali sono i numeri coperti dalle cinque lettere?

[Dare come risposta la somma dei numeri trovati.]

4. Diametri

Benedetta Demoro

Si considerino una circonferenza di centro O e su di essa due punti, A e B , diametralmente opposti. Fissato M il punto medio del segmento OA , si traccino per M , O e B le rette m , o , e b rispettivamente, tra loro parallele, facendo in modo che b sia tangente alla circonferenza. Si indichino, rispettivamente con M' e O' , le intersezioni delle rette m e o sullo stesso arco di circonferenza. Siano infine M'' l'intersezione con la retta b della retta passante per A e per M' , e O'' l'intersezione con la retta b della retta passante per A e O' .

Quanto vale il rapporto tra le lunghezze del segmento AO'' e del segmento $O''M''$?

[Dare come risposta il risultato moltiplicato per 1000.]

5. Concentri

Damiano Poletti

All'interno della circonferenza Maggiore vengono disegnate altre sei circonferenze, tutte tangenti alla Maggiore, tutte di raggio 1 m, in modo che non siano tra loro secanti. Qual è la minima lunghezza in cm del raggio della Maggiore?

6. Rettangoli interi

Giuseppe Rosolini

Quanti rettangoli diversi si possono costruire di perimetro 34 m tali che

- i lati, misurati in m, hanno lunghezze intere (positive);
- i lati maggiori hanno lunghezza superiore al doppio della lunghezza dei lati minori?

7. Somma perfetta

Giuseppe Rosolini

Sia n la somma dei numeri 53 e 64. Qual è il più grande numero intero che, moltiplicato per n , produce un quadrato perfetto inferiore di 10000?

8. Il gioco dell'oca

Edi Rosset

Nel gioco dell'oca ciascun giocatore lancia a turno il dado per muovere la propria pedina lungo un percorso di 63 caselle spostandola ogni volta in avanti del numero di caselle indicate dal dado; vince chi arriva per primo alla casella finale del Traguardo. Se il punteggio del dado è tale da far superare la casella finale, la pedina deve retrocedere di tante caselle quanti sono i punti in eccesso. La pedina di Lei è alla quartultima casella del percorso, cioè tre caselle prima di quella del Traguardo. Qual è la probabilità che raggiunga il traguardo con al più tre lanci del dado?

[Dare come risposta la probabilità moltiplicata per 10000.]

9. Il robot

Leonardo Cimino e Giuseppe Rosolini

Il piccolo robot Noi si può muovere in quattro direzioni soltanto: Nord, Est, Sud, e Ovest. Scelta la direzione, Noi percorre un tratto rettilineo di lunghezza 1 m, si ferma e sceglie di nuovo la direzione (che può restare quella appena utilizzata). Purtroppo, un errore di programmazione impedisce a Noi di cambiare direzione dopo aver scelto la direzione Sud.

Noi si trova al centro di una piazza quadrata di lato 20 m. Quante sono le posizioni che il robot Noi può raggiungere nella piazza dopo aver percorso 8 m?

10. Cassetti

Damiano Poletti

Loro possiede 2026 calzini rossi, 2026 calzini gialli e 2026 calzini blu. I calzini sono divisi in 3 cassetti. Loro sa che ogni cassetto contiene almeno due calzini di ogni colore, ma non ricorda come sono distribuiti. Però sa che il numero di calzini di un certo colore contenuti in un cassetto è sempre minore della somma del numero di calzini dello stesso colore negli altri due. Loro apre un cassetto casualmente e da quello comincia ad estrarre calzini, sempre casualmente e senza guardare, finché non ne ha un paio di ogni colore. Quanti calzini deve pescare al massimo?

11. La prova del nove

Edi Rosset

Dato un numero intero n , sia $N(n)$ il numero naturale che si ottiene sommando le cifre della scrittura decimale di n —la somma di una singola cifra è la cifra stessa, ad esempio $N(4) = 4$. Quanti sono i numeri interi positivi n minori di 10000 tali che $N(N(n)) = 1$?

12. Alla base della piramide Giuseppe Rosolini

Ella si trova all'angolo Nord della base di una piramide retta a base quadrata. Il lato della base è lungo 214 m; l'altezza della piramide misura esattamente come il lato della base. Ella vuole percorrere tutti gli otto spigoli della piramide. Qual è la lunghezza del percorso più breve che le permette di fare ciò, senza necessariamente ritornare all'angolo Nord?

13. Massimi perfetti Lorenzo Mazza

Tra tutte le coppie di interi positivi a e b , si considerino quelle tali che $a + 3b$ e $3a - b$ sono quadrati perfetti. Qual è il massimo valore inferiore a 10000 che può assumere la somma $4a + 2b$?

14. Dissimilitudini Carlo Càssola

Quanti triangoli in cui le misure in gradi degli angoli interni sono intere e una di queste divide le altre, si possono scegliere al massimo, in modo che non ce ne siano due simili tra loro?

15. La gara-a-fasi Benedetta Demoro

Una squadra della gara-a-fasi consiste di tre giocatori; i giocatori entrano in campo con i numeri 1, 2 e 3 sulla maglia. Il regolamento prevede che, in ciascuna delle fasi di gara, ogni squadra metta in campo una **formazione lecita**. La parte complicata della gara-a-fasi è che, soltanto all'inizio di una gara, la giuria rende nota l'elenco delle formazioni *lecite* per quella gara. Il regolamento indica quali condizioni la giuria deve rispettare per preparare l'elenco delle formazioni *lecite* previste per la gara, ma tali condizioni lasciano una notevole libertà di manovra alla giuria; l'effettivo elenco delle formazioni *lecite* influenzerà l'intera gara.

- Sono necessariamente formazioni *lecite* quella che raccoglie tutti e tre i giocatori, e quella con nessun giocatore (sì, ci sono fasi della gara a cui una squadra può decidere di non partecipare).
- Se due formazioni sono *lecite*, allora è *lecita* anche la formazione che include tutti i membri di queste due (ad esempio, se la formazione con il solo giocatore 1 è *lecita* e la formazione con il solo giocatore 3 è *lecita*, allora anche la formazione con i giocatori 1 e 3 deve essere *lecita*);
- se due formazioni sono *lecite*, allora è *lecita* anche la formazione che include i giocatori comuni a entrambe (ad esempio, se la formazione con i giocatori 1 e 2 e la formazione con i giocatori 2 e 3 sono *lecite*, allora anche la formazione con il solo giocatore 2 è *lecita*).

Quante sono le liste di formazioni *lecite* che la giuria può predisporre per l'inizio della gara seguendo il regolamento?

16. Rilevante Andrea Gavazzoni

Un numero intero maggiore di 9 si dice **rilevante** se, denotate con n la sua cifra delle decine e con m quella delle unità, questo si può scrivere come somma di m primi distinti, almeno in un modo e al massimo in n modi diversi (una somma con un singolo addendo ha risultato quel singolo addendo; due modi si considerano *diversi* solo quando uno non si può ottenere dall'altro cambiando l'ordine degli addendi). Ad esempio, 12 è rilevante, ma 15 non è rilevante. Quanto vale la somma dei numeri primi rilevanti compresi tra 10 e 100?

17. Il concorso a premi Damiano Poletti

Novanta concorrenti di un concorso a premi vengono istruiti sul suo funzionamento. La redazione ha due giochi, entrambi basati sulla fortuna, in cui si utilizza un'urna che contiene quattro palline, numerate 1, 2, 3 e 4. Nel Primo, il giocatore vince se, estraendo contemporaneamente due palline dalla scatola, queste sono di parità diversa, cioè non sono entrambe pari, né entrambe dispari. Nel Secondo, il giocatore vince se, estraendo contemporaneamente due palline dalla scatola, queste sono della stessa parità. I concorrenti verranno chiamati, uno alla volta, in un ordine prestabilito e potranno giocare il seguente gioco Globale, che prevede che ci possa essere più di un vincitore. Inizialmente a un concorrente, nell'ordine prestabilito, verrà proposto Primo. Se perde, Globale termina per lui e si passa al concorrente successivo a cui viene nuovamente proposto Primo. Se vince, ai seguenti verrà proposto Secondo. Appena un concorrente vince a Secondo, il concorso termina e tutti i rimanenti concorrenti non avranno alcuna possibilità di vittoria. Qual è il rapporto tra la probabilità di vittoria dell'ultimo e del penultimo concorrente? [Dare come risposta il rapporto moltiplicato per 100.]

18. Nella stella Anna Ulivi

In un quadrato di lato 182 cm, si fissi su ogni lato il suo punto medio e si traccino tutti i segmenti che congiungono i punti medi ai vertici opposti. Si ottiene una stella ad otto punte; al centro di essa si forma un ottagono. Qual è l'area dell'ottagono in cm^2 ?

19. Il codice Anna Ulivi

Voi deve decifrare un codice di quattro cifre mandato da Tu: sa che il messaggio in chiaro consiste di tre lettere dell'alfabeto inglese di 26 lettere, e che il cifrario usato è quello che associa a ogni lettera il numero dell'ordine alfabetico (1 al posto di A, 2 al posto di B, e così via). Ma Tu non ha lasciato spazi tra i numeri che ha scritto. Nonostante questo, Voi riesce a decifrare con certezza il messaggio di tre lettere (ad esempio, se il codice è 1111 non è possibile determinare se il messaggio è AAK, oppure AKA, oppure altro). Quanti sono i possibili codici inviati da Tu?

20. Pentalisi Leonardo Cimino e Giuseppe Rosolini

Un polinomio $P(x)$ si dice **pentalitico** quando ha cinque radici intere distinte. Qual è il più grande intero M di quattro cifre tale che, per ogni polinomio pentalitico $P(x)$ a coefficienti interi, l'equazione $P(x) = M$ non ha soluzioni intere?

21. Le successioni Elena Rossi

Si considerino 26 successioni, ciascuna indicata da una diversa lettera dell'alfabeto, e definite per ricorsione sugli interi positivi nel seguente modo:

$$\begin{cases} A_1 = 1 \\ A_{n+1} = A_n \end{cases} \quad \begin{cases} B_1 = B_2 = 1 \\ B_{n+2} = B_n + B_{n+1} \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = C_2 = C_3 = 1 \\ C_{n+3} = C_n + C_{n+1} + C_{n+2} \end{cases}$$

$$\text{e così via fino a } \begin{cases} Z_1 = Z_2 = \dots = Z_{26} = 1 \\ Z_{n+26} = Z_n + Z_{n+1} + \dots + Z_{n+25} \end{cases}$$

Quanto vale la somma $A_2 + B_4 + C_6 + \dots + Z_{52}$?

Soluzione del problema 1. La risposta «Siamo tutti e diecimila furfanti» è sicuramente falsa perché, se fosse vera, i tremila che la dicono direbbero il vero: questi sono dunque tutti furfanti. Segue anche che la risposta «Siamo tutti e diecimila cavalieri» è falsa. Anche questi tremila sono furfanti. Finalmente, la risposta «I cavalieri presenti sono quattromila», dichiarata da quattromila presenti, può essere vera o falsa. La risposta è 4000.

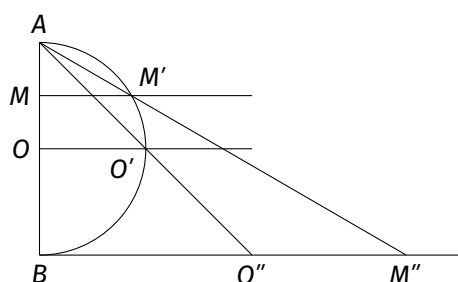
Soluzione del problema 2. Dato che i due dadi sono identici, il valore sulla faccia opposta alla faccia con un puntino è lo stesso. Dunque, i possibili valori sulla faccia superiore sono 4. La probabilità è $\frac{1}{4}$. La risposta è 2500.

Soluzione del problema 3. La somma di una riga è necessariamente $\frac{1}{4}\binom{17}{2} = 34$. Le condizioni sulle quattro righe assicurano che $a + b + c + d + e = 2 \cdot 34 - (12 + 7 + 16) = 33$ in ogni caso, il completamento del quadrato magico è il seguente:

12	7	9	6
13	2	16	3
8	11	5	10
1	14	4	15

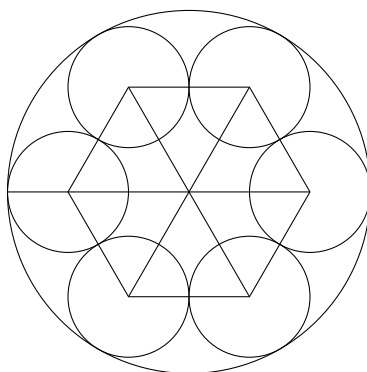
La risposta è 0033.

Soluzione del problema 4. Sia ℓ la lunghezza del segmento AO'' .



Il triangolo ABO'' è isoscele rettangolo; perciò i segmenti AB e BO'' sono lunghi $\frac{\ell}{\sqrt{2}}$. Il triangolo $AM'O$ è equilatero dato che è isoscele e un'altezza relativa a un lato obliquo è anche mediana. Perciò il segmento BM'' è lungo $\ell \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Ne segue che $O''M''$ è lungo $\ell \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$. Il rapporto richiesto è $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \approx 1,931$. La risposta è 1931.

Soluzione del problema 5. La situazione in cui si ottiene il minimo è la seguente figura, in cui tutte le circonferenze, oltre ad essere tangenti alla Maggiore, sono anche tangenti tra loro.



Infatti, se R è la lunghezza in m del raggio di una circonferenza Maggiore, i centri delle circonferenze tangenti devono essere a distanza $R - 1$ dal centro di Maggiore. Date due configurazioni, si consideri in ciascuna il triangolo con vertici i centri di Maggiore e di due cerchi, tangenti a Maggiore, consecutivi. Le ampiezze dei due archi che sottendono l'angolo al centro si confrontano come i lati opposti all'angolo. La lunghezza del lato è maggiore o uguale a 2 m, e l'uguaglianza vale quando le due circonferenze tangenti a Maggiore, sono tra loro tangenti. In quel caso, il poligono centrale è un esagono regolare di lato 2 m e i segmenti che collegano i centri delle circonferenze piccole con quello di Maggiore sono anch'essi lunghi 2 m. Il raggio minimo della circonferenza Maggiore sarà pertanto pari a 3 m. La risposta è 0300.

Soluzione del problema 6. Sia a la lunghezza in m dei lati minori, sia b quella dei lati maggiori. Perciò $a > 0$, $b > 2a$ e $2(a + b) = 34$. Quindi $a + b = 17$, da cui si deriva che $a < \frac{17}{3}$, cioè $a \leq 5$. La risposta è 0005.

Soluzione del problema 7. Dato che $n = 53 + 64 = 117 = 3^2 \times 13$, il fattore deve avere un quadrato perfetto come quoto nella divisione con 13. Si vede che $2^2 \times (3 \times 13)^2 = 6084$ e $3^2 \times (3 \times 13)^2 = 13689$. La risposta è 0052.

Soluzione del problema 8. La pedina di Lei si trova nella casella 60. Si noti che, per quante volte si tiri il dado, la regola del gioco comporta che ci si ritrovi sempre a meno di 6 caselle dal traguardo, quindi in posizione tale da poterlo raggiungere con il lancio successivo. Ad ogni tiro si ha solo probabilità $\frac{1}{6}$ di raggiungere il traguardo e $\frac{5}{6}$ di non farcela. La probabilità di non riuscire a raggiungere il traguardo in 3 tiri è pertanto $(5/6)^3$ e quella di riuscirci è $1 - (5/6)^3 = \frac{91}{216} = 0,421296$. La risposta è 4212.

Soluzione del problema 9. Si considerino assi cartesiani con origine nel centro della piazza, le ascisse positive verso Est, le ordinate positive verso Nord. Ogni tratto rettilineo modifica esclusivamente l'ascissa x o l'ordinata y della posizione del robot Noi. La posizione raggiunta eseguendo una coppia di scelte (D_1, D_2) coincide con quella raggiunta eseguendo la coppia di scelte (D_2, D_1) . Perciò la condizione imposta dell'errore di programmazione non impedisce di raggiungere qualunque posizione a coordinate intere e minore o uguale a 8 nel quadrato con vertici di coordinate $(8, 0)$, $(0, 8)$, $(-8, 0)$ e $(0, -8)$ la cui somma di coordinate è pari. La risposta è 0081.

Soluzione del problema 10. Il numero di calzini di un colore in un cassetto è al minimo 2, e al massimo 1012. Infatti, detti x, y, z le quantità di calzini di un colore nei 3 cassette si ha che $x + y + z = 2026$ e

$$x < y + z = 2026 - x$$

da cui $x < 1013$. Per essere sicuri di estrarre almeno un paio di calzini per ogni colore sarà quindi necessario estrarre, nel caso peggiore, $2026 = 1012 + 1012 + 2$ calzini. Questo massimo è realmente necessario, per esempio, nella seguente configurazione:

	Rosso	Gialli	Blu	Totale
Cassetto 1	1012	1012	1012	3036
Cassetto 2	1012	1012	2	2026
Cassetto 3	2	2	1012	1016

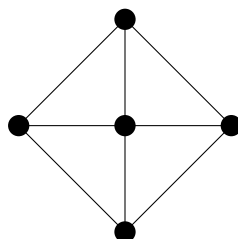
La risposta è 2026.

Soluzione del problema 11. Per $0 < n < 10000$ è sicuramente $N(n) \leq 36$. Perciò, se $N(N(n)) = 1$, allora $N(n) = 1, 10$.

Si tratta di contare i modi possibili per scrivere 1 e 10 come somma di quattro cifre, ordinate decrescendo. È $N(n) = 1$ per $(1, 0, 0, 0)$: in totale, 4 numeri.

È $N(n) = 10$ per tutte le quadruple di interi positivi le cui componenti hanno somma 10, escluso quelle in cui c'è una sola componente diversa da 0 (e uguale a 10). In totale sono $\binom{13}{3} - 4 = 282$. La risposta è 0286.

Soluzione del problema 12. Il grafo degli spigoli è



Se Ella percorre due volte uno degli spigoli alla base, assicura che tutti i vertici, esclusi due, abbiano grado di ingresso pari. Uno spigolo obliquo è lungo $107\sqrt{6}$ m.

Il percorso è lungo $(4\sqrt{6} + 10)107$ m ≈ 2118 .

La risposta è 2118.

Soluzione del problema 13. Fissati $n^2 = a + 3b$ e $m^2 = 3a - b$, si ricava che $a = \frac{n^2+3m^2}{10}$ e $b = \frac{3n^2-m^2}{10}$. La condizione che a e b siano interi impone che $n^2 + 3m^2 \equiv 0 \pmod{10}$ e $3n^2 - m^2 \equiv 0 \pmod{10}$. Dato che la cifra delle unità di un quadrato perfetto è 0, 1, 4, 5, 6, o 9, si vede che le due condizioni sono verificate soltanto se $n^2 \equiv m^2 \equiv 5 \pmod{10}$ oppure $n^2 \equiv m^2 \equiv 0 \pmod{10}$. Si controllano i casi migliori:

$$\begin{array}{lll} 15^2 + 95^2 = 9250 & 25^2 + 95^2 = 9650 & 40^2 + 90^2 = 9700 \\ 45^2 + 85^2 = 9250 & 65^2 + 75^2 = 9850 & 70^2 + 70^2 = 9800 \end{array}$$

Tra i multipli di 5 si trova $30^2 + 95^2 = 9925$, ma le classi di resti modulo 10 dei due numeri sono diverse. La risposta è 9850.

Soluzione del problema 14. Sia α la dimensione minore dei tre angoli. Gli altri due angoli sono $\beta = m\alpha$ e $\gamma = n\alpha$ con $m \leq n$. Deve essere $\alpha(1 + m + n) = 180$, perciò i casi si calcolano contando le coppie (m, n) con $m \leq n$ tali che $m + n = \frac{180}{\alpha} - 1$, cioè la parte intera di $\frac{1}{2} \left(\frac{180}{\alpha} - 1 \right)$. La tabella riassume i valori:

α	1	2	3	4	5	6	9	10	12	15	18	20	30	36	45	60
$m + n$	179	89	59	44	35	29	19	17	14	11	9	8	5	4	3	2
$m \leq n$	89	44	29	22	17	14	9	8	7	5	4	4	2	2	1	1

La risposta è 0258.

Soluzione del problema 15. Le due liste estreme $C := \{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}$ e $D := \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$, sono di formazioni lecite. Per elencare le altre, si indichino con x, y , e z tre elementi arbitrari e distinti dell'insieme $\{1, 2, 3\}$:

1. $C \cup \{\{x\}\}$: ce ne sono 3 di questo tipo.
2. $C \cup \{\{x, y\}\}$: ce ne sono 3 di questo tipo.
3. $C \cup \{\{x\}, \{y, z\}\}$: ce ne sono 3 di questo tipo.
4. $C \cup \{\{x\}, \{x, y\}\}$: ce ne sono 6 di questo tipo.
5. $C \cup \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}\}$: ce ne sono 3 di questo tipo.
6. $C \cup \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$: ce ne sono 3 di questo tipo.
7. $C \cup \{\{x\}, \{y\}, \{x, y\}, \{x, z\}\}$: ce ne sono 6 di questo tipo.

La risposta è 0029.

Soluzione del problema 16. Sia p un numero primo rilevante di due cifre. Dal momento che $p > 2$, la cifra m è 1, 3, 7 o 9. Perciò i primi da ricercare si scrivono come una somma di un numero dispari di addendi. Nessuno di questi addendi potrà essere 2, dato che devono essere tutti a due a due distinti. Poiché la somma dei primi 9 numeri primi è $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 127$ è maggiore di 100 (anche se primo), la cifra m non può essere 9. La somma dei primi sette primi dispari $3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 = 75$ e l'unico primo p con cifra delle unità 7 e maggiore di 75 è 97. Dato che $5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 = 95$ e $7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 119$, il primo 3 deve comparire come addendo. Inoltre $97 - 75 = 22$ e $19 + 22 = 41$ che è primo. Si vede anche che non è possibile eliminare 5 tra gli addendi perché $3 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 =$

90 e $3 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 115$. A questo punto, fissando i quattro addendi minori, si vede che 97 si ottiene come

$$\begin{aligned} &(3 + 5 + 7 + 11) + 13 + 17 + 41 \quad (3 + 5 + 7 + 13) + 17 + 23 + 29 \quad (3 + 5 + 11 + 13) + 17 + 19 + 29 \\ &(3 + 5 + 7 + 11) + 17 + 23 + 31 \\ &(3 + 5 + 7 + 11) + 19 + 23 + 29 \end{aligned}$$

ma $(3 + 5 + 13 + 17) + 19 + 23 + 29 = 109$. Quindi 97 è rilevante.

I numeri primi con unità 3 sono 23, 43, 53, 73 e 83. Si vede che 23 si ottiene come $3 + 7 + 13$ e $5 + 7 + 11$; 43 si ottiene almeno come $3 + 11 + 29$, $3 + 17 + 23$, $5 + 7 + 31$, $7 + 13 + 23$, e $7 + 17 + 19$; 53 si ottiene almeno come $3 + 13 + 37$, $3 + 19 + 31$, $5 + 7 + 41$, $5 + 11 + 37$, $5 + 17 + 31$, e $5 + 19 + 29$; 73 si ottiene come $3 + 29 + 41$, $5 + 31 + 37$, $7 + 29 + 37$, $13 + 19 + 41$, $13 + 23 + 37$, $13 + 29 + 31$, $17 + 19 + 37$, $19 + 23 + 31$; e 83 si ottiene almeno come $3 + 7 + 73$, $3 + 13 + 67$, $3 + 19 + 61$, $3 + 37 + 43$, $5 + 7 + 71$, $5 + 11 + 67$, $5 + 17 + 61$, $5 + 19 + 59$, e $5 + 31 + 47$. Perciò c'è un solo rilevante: 23.

Tutti i primi di due cifre con cifra delle unità 1 sono rilevanti in quanto sono loro stessi primi: sono 11, 31, 41, 61, 71.

La risposta è 0335.

Soluzione del problema 17. Siano p la probabilità di vincere al Primo e $q = p/2$ la probabilità di vincere al Secondo. Siano inoltre P_i, S_i le probabilità che l' i -esimo giocatore giochi al Primo e al Secondo, rispettivamente. Vale che $P_1 = 1, S_1 = 0$ e

$$P_{i+1} = (1 - p)P_i \quad S_{i+1} = S_i(1 - q) + P_i p.$$

Dalle precedenti relazioni si ottiene

$$\begin{aligned} P_i &= (1 - p)^{i-1}, \\ S_i &= [(1 - q)^{i-1} - (1 - p)^{i-1}] \frac{p}{p - q} = 2 [(1 - q)^{i-1} - (1 - p)^{i-1}]. \end{aligned}$$

Si ha quindi

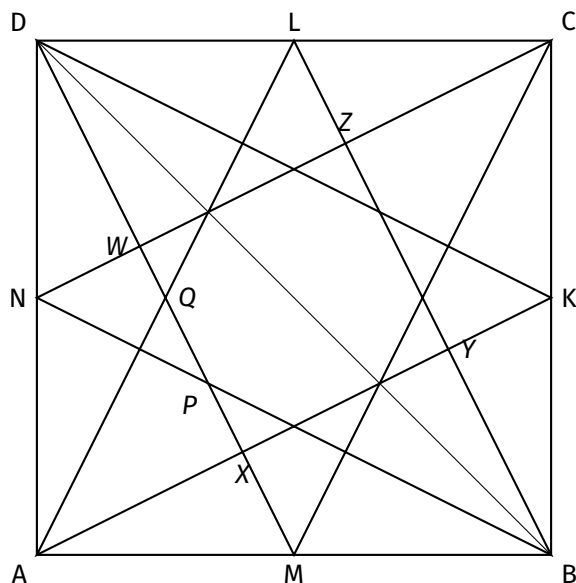
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(i\text{-esimo giocatore vinca}) &= \mathbb{P}(i\text{-esimo giocatore giochi al Primo e vinca}) \\ &\quad + \mathbb{P}(i\text{-esimo giocatore giochi al Secondo e vinca}) \\ &= P_i p + S_i \frac{p}{2} = (1 - q)^{i-1} p = \left(\frac{2}{3}\right)^i. \end{aligned}$$

Il rapporto richiesto è $\frac{2}{3}$.

La risposta è 0066.

Soluzione del problema 18.

Sia $ABCD$ un quadrato di lato 182 cm. Siano M, K, L , e N i punti medi dei lati AB, BC, CD e DA , rispettivamente. Sia X l'intersezione di DM e AK , Y quella di AK e BL , Z quella di BL e CN , e W quella di CN e DM . Siano P e Q le intersezioni di DM con BN e AL , rispettivamente.



Dato che i punti medi restano fissi per le simmetrie del quadrato, l'intera figura resta fissa. Perciò XYZW è un quadrato e i triangoli rettangoli la cui ipotenusa è un lato dell'ottagono centrale sono uguali. (Si noti che non sono isosceli, e l'ottagono non è regolare.) Si può così calcolare l'area dell'ottagono, sottraendo all'area del quadrato XYZW, le aree dei quattro triangoli rettangoli (uguali) che appoggiano sull'ottagono. Dato che N è il punto medio di AD, W è il punto medio di DX e $AX = DW$. Perciò l'area del quadrato XYZW è uguale alla somma delle aree del triangolo NWD e del trapezio rettangolo AXWN. In altre parole, l'area del quadrato XYZW è un quinto dell'area del quadrato ABCD.

Poi, nel triangolo ABD, il punto P è il baricentro, il quale divide ciascuna mediana nel rapporto 2 : 1; così $DP = 2PM$. Quindi,

$$WQ = DQ - DW = \frac{DM}{2} - \frac{2DM}{5} = \frac{DM}{10} \quad \text{e} \quad PX = PM - XM = \frac{DM}{3} - \frac{DM}{5} = \frac{2DM}{15}$$

Dato che $DM^2 = \frac{5}{4}AB^2$, l'area cercata è

$$\frac{AB^2}{5} - 4 \frac{WQ \cdot PX}{2} = \frac{AB^2}{5} - \frac{2}{75}DM^2 = \frac{AB^2}{5} - \frac{AB^2}{30} = \frac{AB^2}{6} = 5520,6 \text{ cm}$$

La risposta è 5520.

Soluzione del problema 19. Supponiamo che il messaggio sia XYZW. Per semplicità chiamiamo nel seguito **base** le cifre 1 e 2. Notiamo che una delle quattro cifre deve essere base perché il messaggio in chiaro consiste di tre lettere e che X non può essere 0 (questa ultima condizione impone la separazione di casi in alcune situazioni seguenti). Notiamo anche che una cifra base determina con certezza una lettera se non è seguita da un'altra cifra e non è preceduta da una cifra base. A questo punto, si devono affrontare i vari casi.

Consideriamo dapprima i casi che non coinvolgono esattamente due cifre base:

- ▶ Se le cifre base in XYZW sono quattro, il messaggio è indecifrabile.
- ▶ Se le cifre base in XYZW sono tre, il messaggio è decifrabile se e solo se l'altra cifra non è X ed è 0 oppure non è X né W ed è 7, 8 o 9 ed è preceduta da 2, dato che 0, 7, 8 e 9 sono le uniche cifre che, con certezza, possono essere associate o meno alla specifica cifra base che la precede. I messaggi possibili sono $2^3 \cdot 3 + 2^2 \cdot 6 = 48$.
- ▶ Se le cifre base in XYZW sono una soltanto, allora il messaggio è decifrabile se e solo se la cifra base non è in W, per quanto osservato all'inizio. Se X è base, Z e W possono essere 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Poi, se $X = 1$, Y può essere 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Se $X = 2$, Y può essere 0, 3, 4, 5, 6. I casi Y base e Z base sono simili al precedente con i cambi, a partire da questo, $X \mapsto Y, Y \mapsto Z, Z \mapsto X$ e $X \mapsto Z, Y \mapsto W, W \mapsto X$, rispettivamente. In totale, i messaggi possibili sono $3 \cdot [7^2 \cdot (8 + 5)] = 1911$.

Se le cifre base in XYZW sono due, il computo dei messaggi possibili dipende dalle loro posizioni. Si noti che cifre successive della forma 10, 20, 27, 28, e 29 assicurano unica lettura. Per gestire il caso di due cifre base nel codice utilizziamo le parentesi quadre per indicare le possibili cifre a ciascuna diramazione nel codice, ad esempio $[3, 4][10, 2[0, 7 \dots 9]]$ indica che nella prima posizione ci può essere una cifra 3 o 4, in seconda posizione ci può essere una cifra 1 con 0 in terza posizione, oppure una cifra 2 con 0, 7, 8 oppure 9 in terza posizione.

- se X e Y sono base, il codice è della forma

$$[1, 2][10, 2[0, 7 \dots 9]][3 \dots 9]$$

In totale, i messaggi possibili sono $2 \cdot (1 + 4) \cdot 7 = 70$.

- se X e Z sono base, il codice è di una delle seguenti forme:

$$[1, 2][0[1, 2][3 \dots 9], [3 \dots 9][1, 2]0] \quad 2[7 \dots 9][1[3 \dots 9], 2[3 \dots 6]] \quad [1[3 \dots 9], 2[3 \dots 6]]2[7 \dots 9]$$

In totale, i messaggi possibili sono $2 \cdot (2 \cdot 7 + 7 \cdot 2) + 3 \cdot (7 + 4) + (7 + 4) \cdot 3 = 122$.

- se X e W sono base, il codice è della forma

$$[1[0, 3 \dots 9], 2[0, 3 \dots 6]][3 \dots 9][1, 2]$$

In totale, i messaggi possibili sono $(8 + 5) \cdot 7 \cdot 2 = 182$.

- se Y e Z sono base, il codice è della forma

$$[3 \dots 9][1, 2][10, 2[0, 7 \dots 9]]$$

In totale, i messaggi possibili sono $2 \cdot (1 + 4) \cdot 7 = 70$.

- se Y e W sono base, il codice è della forma

$$[3 \dots 9][1[0, 3 \dots 9], 2[0, 3 \dots 6]][1, 2]$$

In totale, i messaggi possibili sono $(8 + 5) \cdot 7 \cdot 2 = 182$.

- se Z e W sono base, il codice è della forma

$$[3 \dots 9][3 \dots 9][1, 2][1, 2]$$

In totale, i messaggi possibili sono $7^2 \cdot 2^2 = 196$.

La risposta si ottiene sommando le possibilità elencate $48 + 1911 + 70 + 122 + 182 + 70 + 182 + 196$.

La risposta è 2781.

Soluzione del problema 20. Se a, b, c, d , ed e sono cinque soluzioni intere del polinomio $P(x)$, per il Teorema di Ruffini

$$P(x) = r(x) \cdot (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c) \cdot (x - d) \cdot (x - e)$$

dove $r(x)$ è un altro polinomio a coefficienti interi. Supponiamo che x_0 sia una soluzione intera dell'equazione $P(x) = M$; così

$$M = (x_0 - a) \cdot (x_0 - b) \cdot (x_0 - c) \cdot (x_0 - d) \cdot (x_0 - e) \cdot r(x_0)$$

Poiché x_0 è un numero intero e a, b, c, d ed e sono interi distinti, anche i numeri $(x_0 - a), (x_0 - b), (x_0 - c), (x_0 - d)$ e $(x_0 - e)$ sono interi e distinti. Inoltre, $r(x_0)$ è intero. In particolare, un numero M che non soddisfa i requisiti del problema si può scrivere come prodotto di 6 interi, di cui 5 tra questi sono distinti a due a due.

Viceversa, sia $M = g \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot f_5$, dove M, g e $f_i, i = 1, \dots, 5$ sono tutti numeri interi, e $f_i \neq f_j$ per $1 \leq i < j \leq 5$. È facile vedere che esiste un polinomio $P(x)$ pentalitico a coefficienti interi tale che $P(x) = M$ abbia soluzione 0: basta prendere $P(x) := g \cdot (x + f_1) \cdot (x + f_2) \cdot (x + f_3) \cdot (x + f_4) \cdot (x + f_5)$.

Si deve perciò determinare il più grande intero $M < 10000$ che non può essere fattorizzato come prodotto di 6 interi, 5 tra questi distinti. Per semplicità, nel seguito chiamiamo un numero che ammette una tale fattorizzazione **sbagliato**.

Notiamo subito che $M > 0$ è sbagliato se M ha almeno tre fattori primi p_1, p_2 e p_3 , dato che $(-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \mid M$. Supponiamo perciò che M abbia al massimo due divisori primi e

$$M = g \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdot f_4 \cdot f_5, \quad (1)$$

$M = p^k$ è sbagliato se e solo se $k > 3$. Per $k = 3$, se due fattori in (1) hanno valore assoluto p , allora deve esserci un terzo fattore con valore assoluto p , i rimanenti tre con valore assoluto 1; perciò un tale prodotto non rende M sbagliato. Se un solo fattore ha valore assoluto p , allora un altro fattore ha valore assoluto p^2 . Ciascuno dei rimanenti quattro deve avere valore assoluto 1; perciò neppure un tale prodotto rende M sbagliato. D'altro canto, per $k > 3$, si scrive $M = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 \cdot p \cdot (-p) \cdot p^{k-2}$.

$M = p^h q^k$ è sbagliato se e solo se $h = k = 1$ dato che, se uno degli esponenti è maggiore di 1, diciamo $k > 1$, allora M si scrive come prodotto $(-1) \cdot (-1) \cdot (1) \cdot (-p^h) \cdot q \cdot (-q^{k-1})$.

Si vede che $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$ e $9998 = 2 \cdot 4999$.

La risposta è 9998.

Soluzione del problema 21. Indicata con $\boxed{n}$ la n -esima lettera dell'alfabeto per $0 < n \leq 26$, si dimostra che, se $0 \leq k < n$, allora $\boxed{n}_{n+k+1} = 2^k(n-1) + 1$. Infatti:

Base. $\boxed{n}_{n+1} = n = 2^0(n-1) + 1$.

Passo. Supponiamo che $\boxed{n}_{n+k+1} = 2^k(n-1) + 1$. Dato che $k < n$, $\boxed{n}_{k+1} = 1$ è uno degli addendi che produce la somma $\boxed{n}_{n+k+1}$. Perciò

$$\boxed{n}_{n+k+2} = (\boxed{n}_{n+k+1} - 1) + \boxed{n}_{n+k+1} = 2^k(n-1) + 2^k(n-1) + 1 = 2^{k+1}(n-1) + 1.$$

In particolare, $\boxed{n}_{2n} = 2^{n-1}(n-1) + 1$; così

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{26} \boxed{n}_{2n} &= \sum_{n=1}^{26} [2^{n-1}(n-1) + 1] = \sum_{n=0}^{25} 2^n n + \sum_{n=0}^{25} 1 = \sum_{n=1}^{25} \sum_{i=1}^{25} i \leq n 2^n + 26 = \sum_{i=1}^{25} \sum_{n=1}^{25} i \leq n 2^n + 26 \\
 &= \sum_{i=1}^{25} 2^i \sum_{n=0}^{25-i} 2^n + 26 = \sum_{i=1}^{25} 2^i (2^{26-i} - 1) + 26 = \sum_{i=1}^{25} (2^{26} - 2^i) + 26 \\
 &= \sum_{i=1}^{25} (2^{26} - 2^i) + 26 = 25 \cdot 2^{26} - 2(2^{25} - 1) + 26 = 24 \cdot 2^{26} + 28 = 1610612764
 \end{aligned}$$

La risposta è 2764.