

Giochi, Problemi e Percorsi Matematici

Palazzo del Turismo · Cesenatico

Ipersguardi

Esplorazioni multidimensionali

Venerdì 8 maggio 2026

Federico Incitti

Liceo Scientifico "Plinio Seniore" · Roma

Giochi, Problemi e Percorsi Matematici

Palazzo del Turismo · Cesenatico

Ipercentri di un triangolo

Esplorazioni multidimensionali

Venerdì 8 maggio 2026

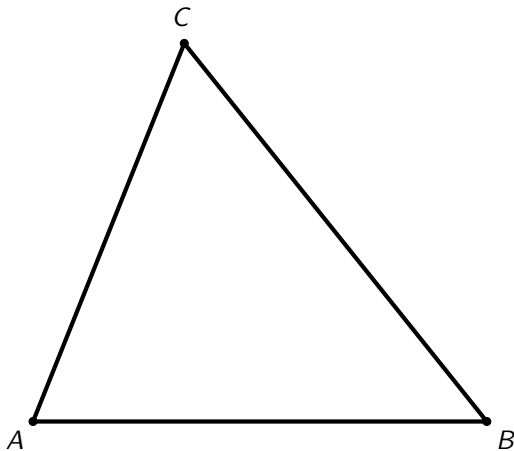
Federico Incitti

Liceo Scientifico "Plinio Seniore" · Roma

Punti notevoli 2D

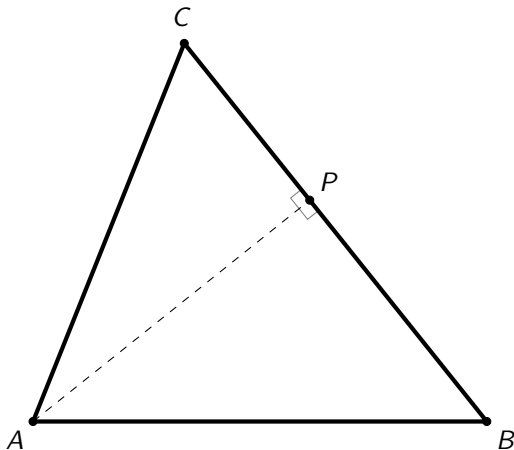
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)



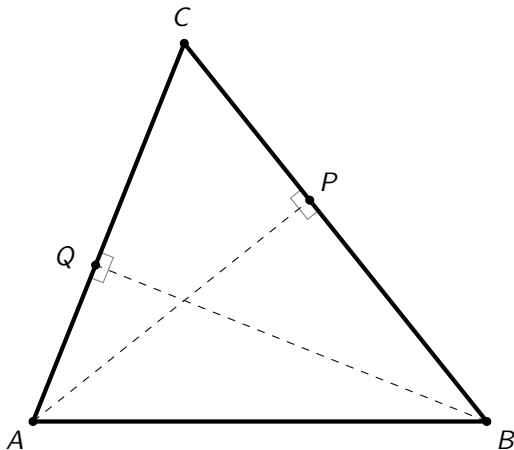
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP



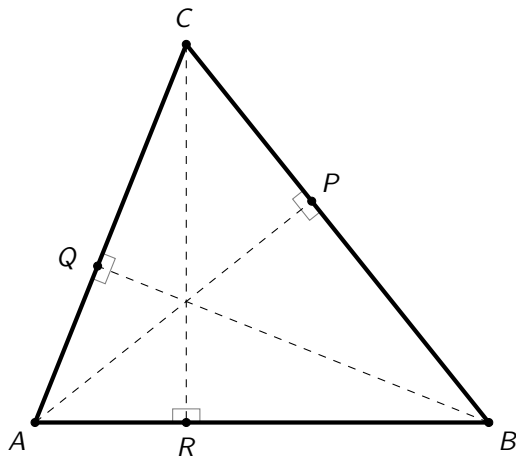
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ



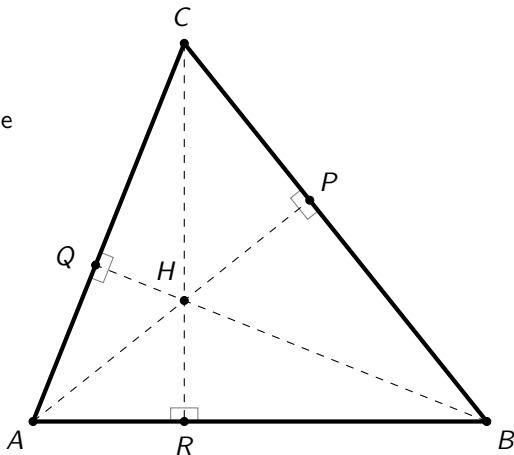
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR



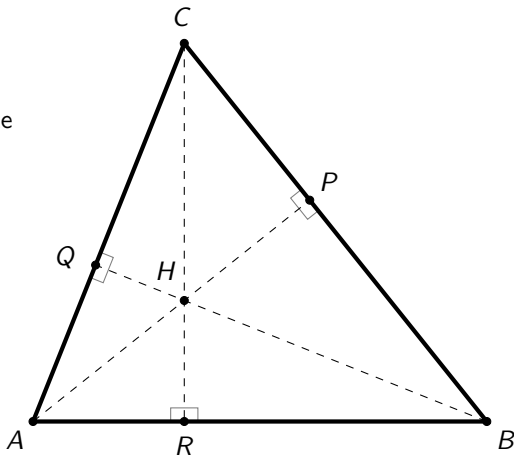
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
- *Ortocentro* H : intersezione delle tre altezze



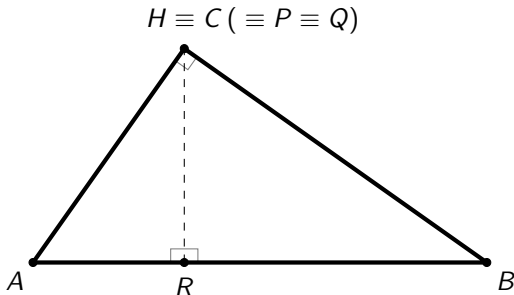
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
- *Ortocentro* H : intersezione delle tre altezze
- Proprietà:
 - ABC acutangolo
 $\Rightarrow H$ interno



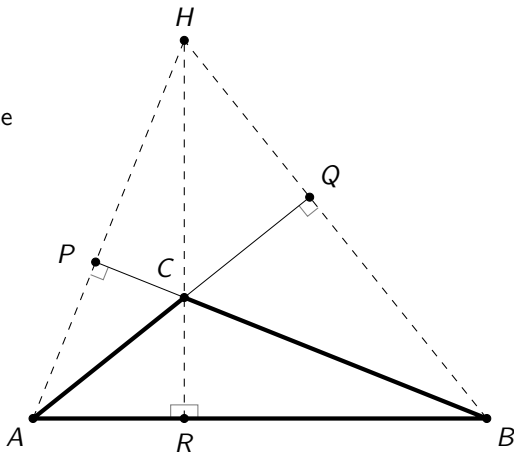
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
- *Ortocentro* H : intersezione delle tre altezze
- Proprietà:
 - ABC acutangolo
 $\Rightarrow H$ interno
 - ABC rettangolo in C
 $\Rightarrow H \equiv C$



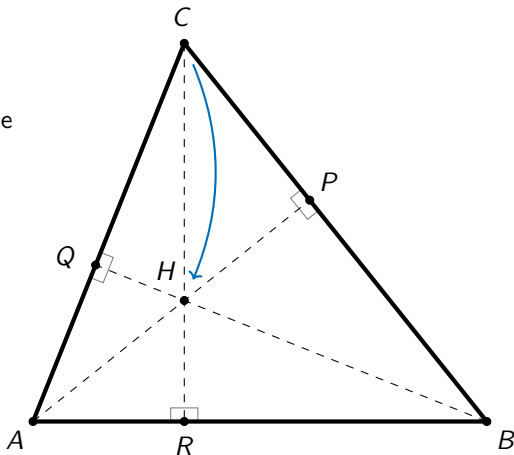
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
- **Ortocentro** H : intersezione delle tre altezze
- Proprietà:
 - ABC acutangolo
 $\Rightarrow H$ interno
 - ABC rettangolo in C
 $\Rightarrow H \equiv C$
 - ABC ottusangolo
 $\Rightarrow H$ esterno



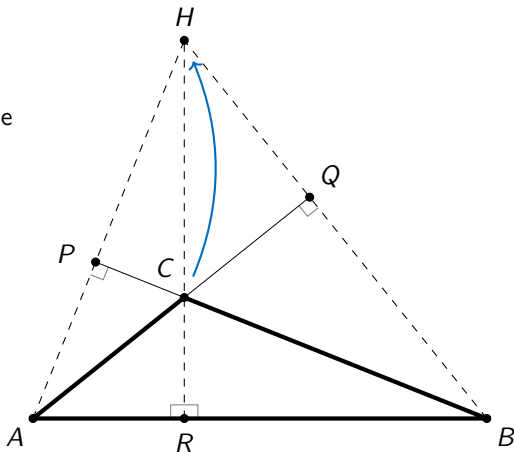
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
- **Ortocentro** H : intersezione delle tre altezze
- Proprietà:
 - ABC acutangolo
 $\Rightarrow H$ interno
 - ABC rettangolo in C
 $\Rightarrow H \equiv C$
 - ABC ottusangolo
 $\Rightarrow H$ esterno



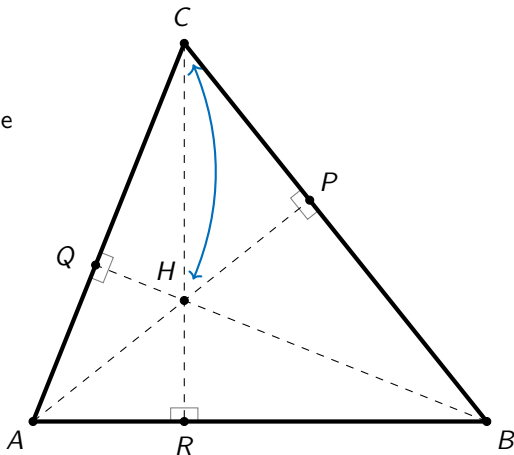
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
- **Ortocentro** H : intersezione delle tre altezze
- Proprietà:
 - ABC acutangolo
 $\Rightarrow H$ interno
 - ABC rettangolo in C
 $\Rightarrow H \equiv C$
 - ABC ottusangolo
 $\Rightarrow H$ esterno



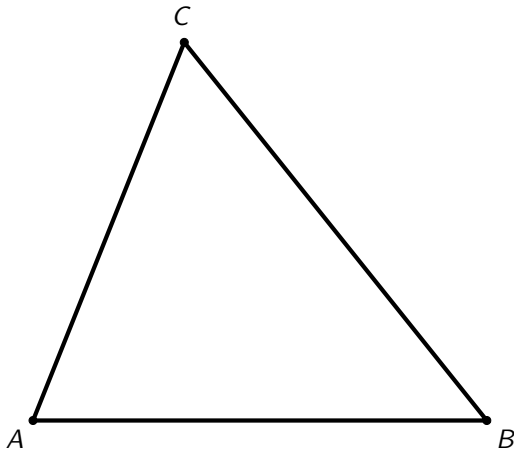
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
- **Ortocentro** H : intersezione delle tre altezze
- Proprietà:
 - ABC acutangolo
 $\Rightarrow H$ interno
 - ABC rettangolo in C
 $\Rightarrow H \equiv C$
 - ABC ottusangolo
 $\Rightarrow H$ esterno



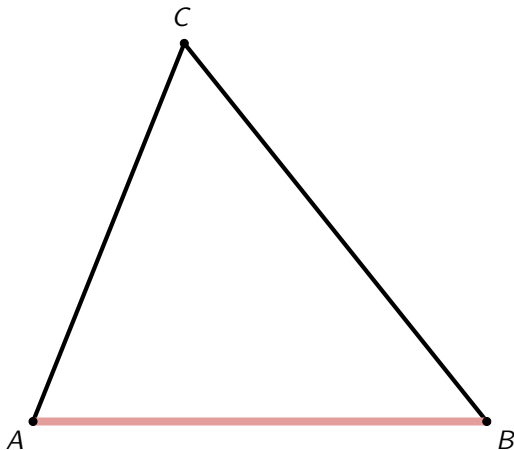
Punti notevoli 2D (Corrispondenza ortocentrica)

- ABC triangolo acutangolo



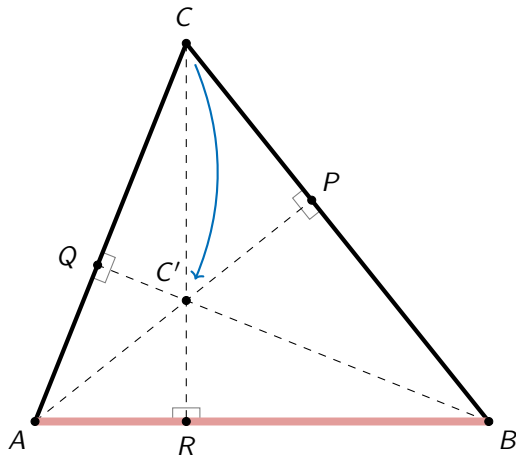
Punti notevoli 2D (Corrispondenza ortocentrica)

- ABC triangolo acutangolo, con un lato AB fissato



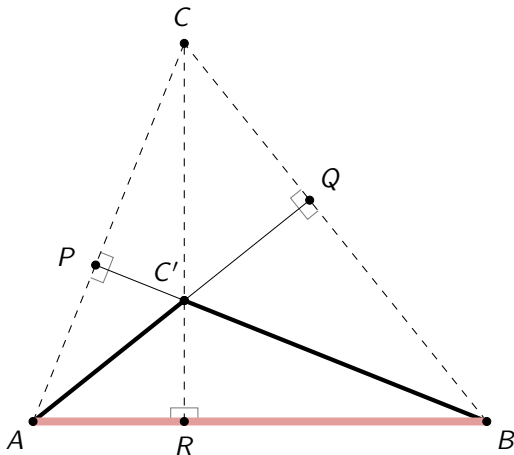
Punti notevoli 2D (Corrispondenza ortocentrica)

- ABC triangolo acutangolo, con un lato AB fissato
 - Ortocentro di ABC : C'



Punti notevoli 2D (Corrispondenza ortocentrica)

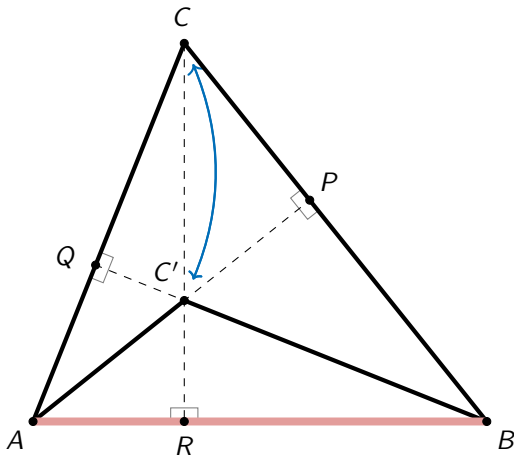
- ABC triangolo acutangolo, con un lato AB fissato
 - Ortocentro di ABC : C'
- ABC' triangolo ottusangolo, con angolo ottuso in C'



Punti notevoli 2D (Corrispondenza ortocentrica)

- ABC triangolo acutangolo, con un lato AB fissato
 - Ortocentro di ABC : C'
- ABC' triangolo ottusangolo, con angolo ottuso in C'
 - Ortocentro di ABC' : C
- *Corrispondenza ortocentrica* rispetto al segmento AB :

$$ABC \xleftrightarrow{h_{AB}} ABC'$$

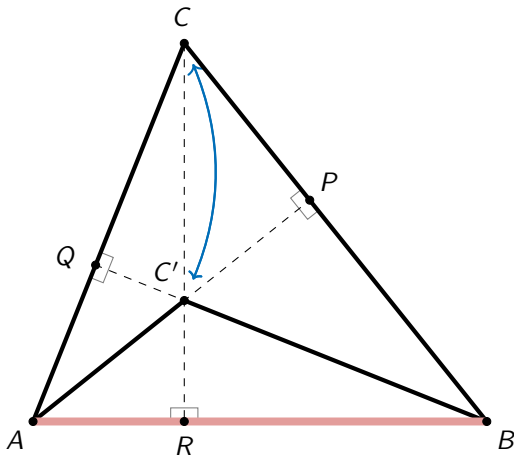


Punti notevoli 2D (Corrispondenza ortocentrica)

- ABC triangolo acutangolo, con un lato AB fissato
 - Ortocentro di ABC : C'
- ABC' triangolo ottusangolo, con angolo ottuso in C'
 - Ortocentro di ABC' : C
- *Corrispondenza ortocentrica* rispetto al segmento AB :

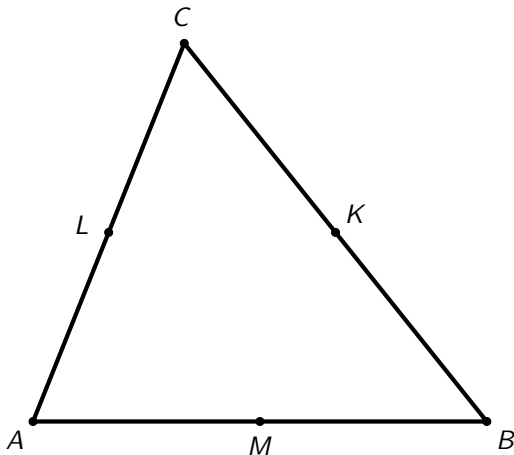
$$ABC \xleftrightarrow{h_{AB}} ABC'$$

(corrispondenza biunivoca)



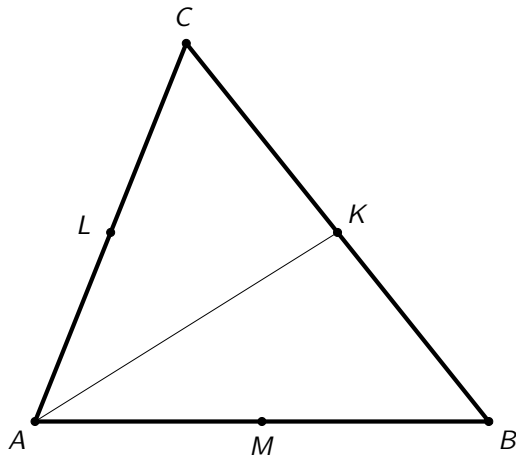
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M



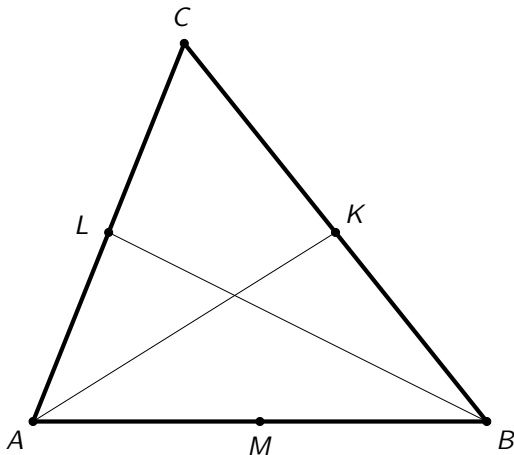
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Mediane: AK



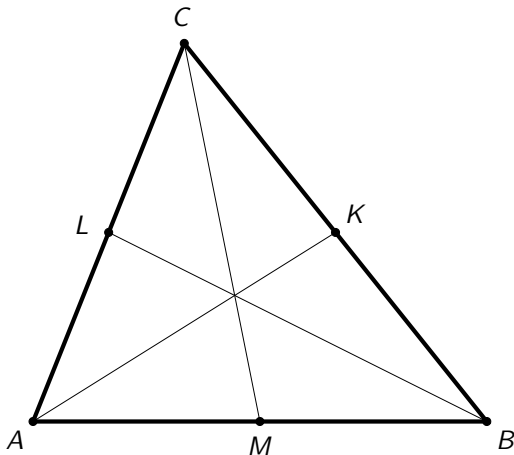
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Mediane: AK, BL



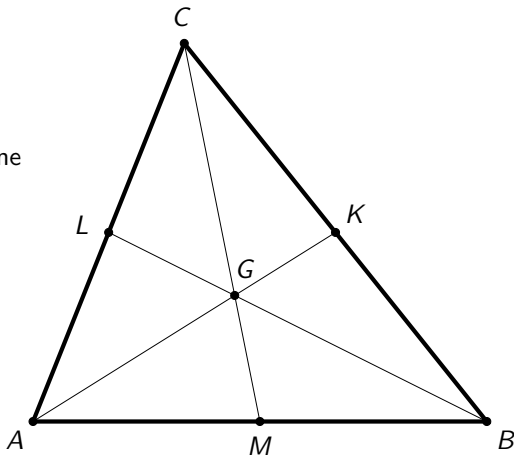
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Mediane: AK, BL, CM



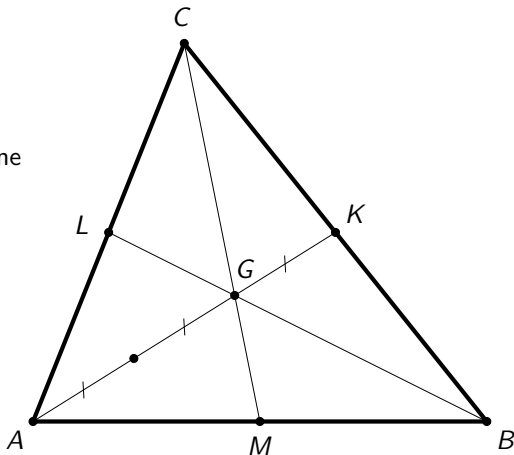
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Mediane: AK, BL, CM
- *Baricentro* G : intersezione delle tre mediane



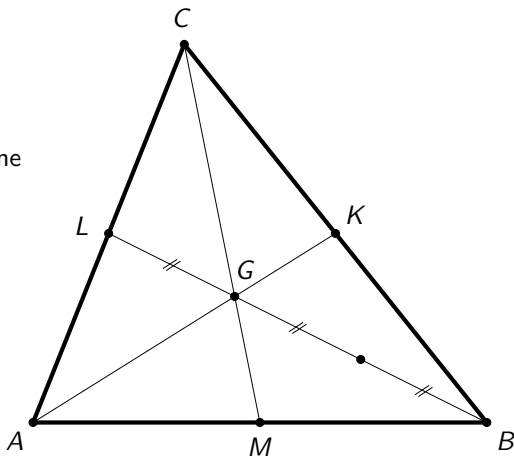
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Mediane: AK, BL, CM
- *Baricentro* G : intersezione delle tre mediane
- Proprietà:
 - $AG = 2GK$



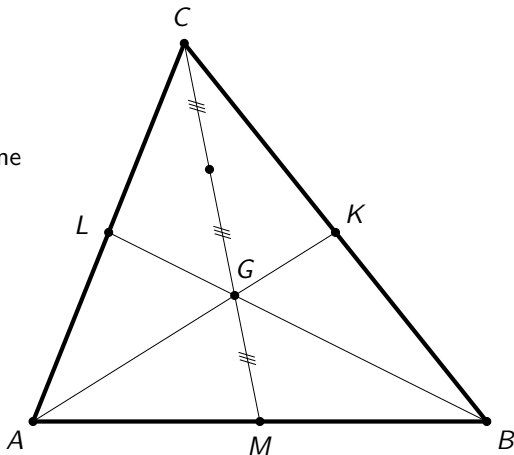
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Mediane: AK, BL, CM
- *Baricentro* G : intersezione delle tre mediane
- Proprietà:
 - $AG = 2GK$
 - $BG = 2GL$



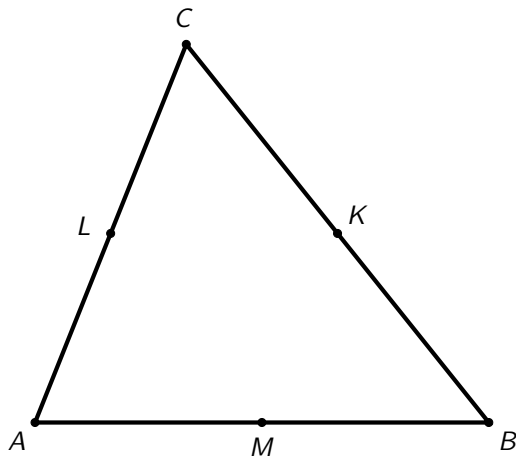
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Mediane: AK, BL, CM
- *Baricentro* G : intersezione delle tre mediane
- Proprietà:
 - $AG = 2GK$
 - $BG = 2GL$
 - $CG = 2GM$



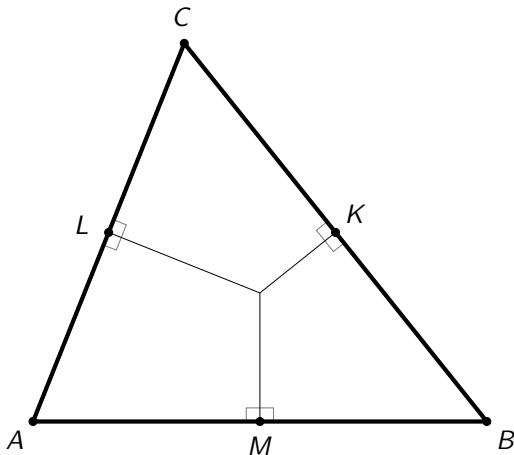
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M



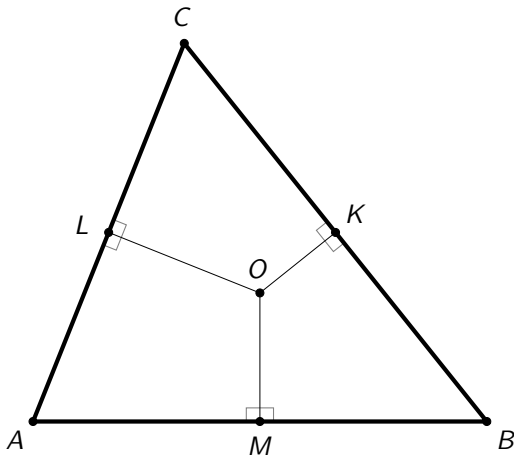
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Assi del triangolo



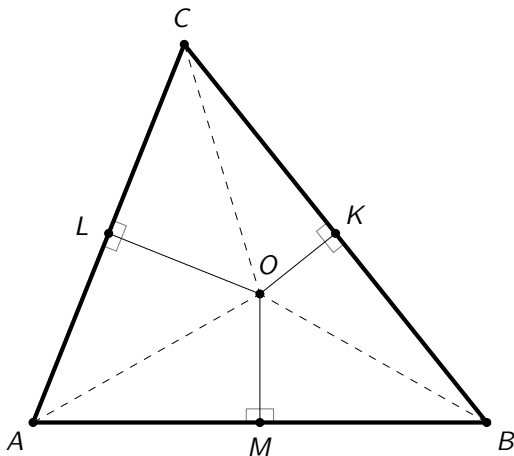
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Assi del triangolo
- *Circocentro* O : intersezione dei tre assi



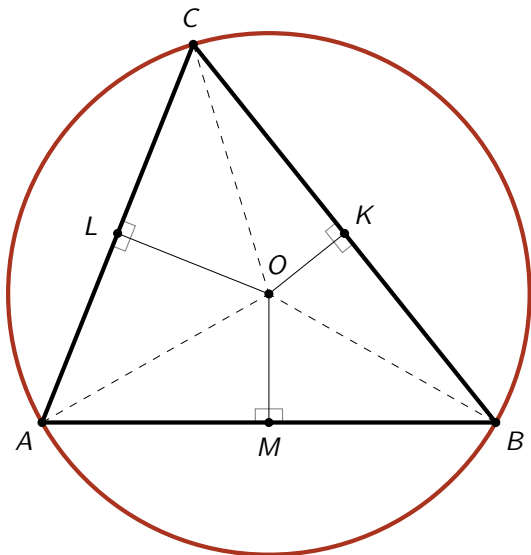
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Assi del triangolo
- *Circocentro* O : intersezione dei tre assi
- Proprietà:
 - $OA = OB = OC$



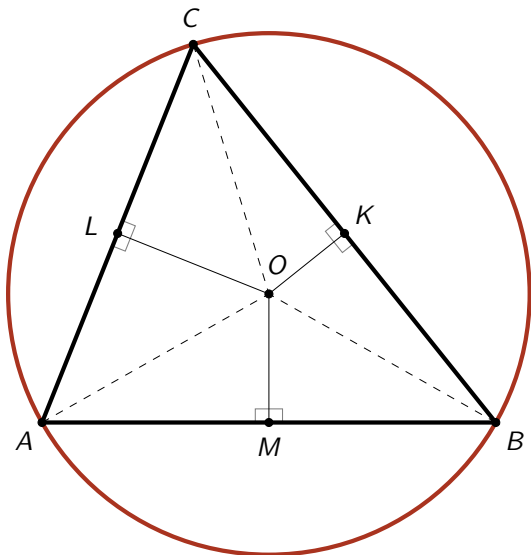
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Assi del triangolo
- *Circocentro* O : intersezione dei tre assi
- Proprietà:
 - $OA = OB = OC$
 - O centro della circonferenza circoscritta



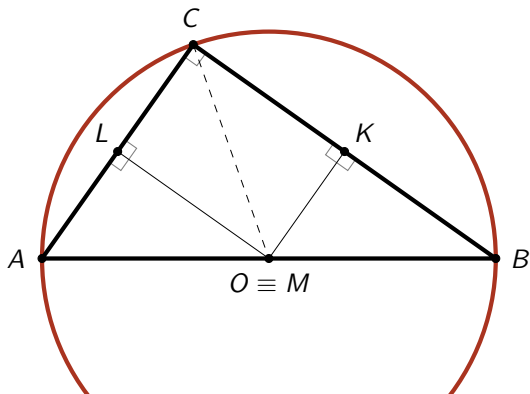
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Assi del triangolo
- *Circocentro* O : intersezione dei tre assi
- Proprietà:
 - ABC acutangolo
 $\Rightarrow O$ interno



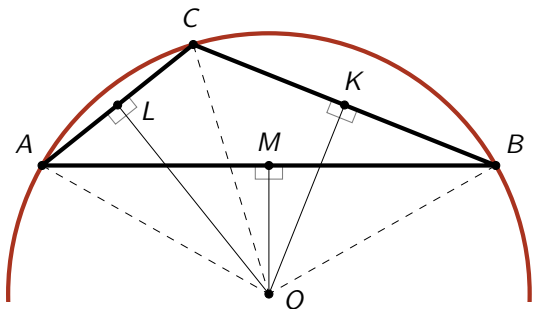
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Assi del triangolo
- *Circocentro* O : intersezione dei tre assi
- Proprietà:
 - ABC acutangolo
 $\Rightarrow O$ interno
 - ABC rettangolo in C
 $\Rightarrow O \equiv M$



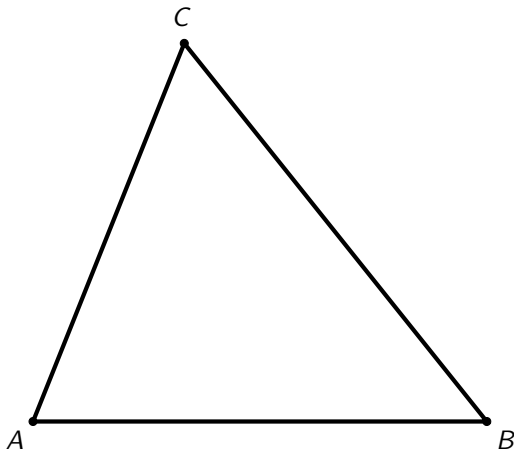
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Punti medi: K, L, M
 - Assi del triangolo
- *Circocentro* O : intersezione dei tre assi
- Proprietà:
 - ABC acutangolo
 $\Rightarrow O$ interno
 - ABC rettangolo in C
 $\Rightarrow O \equiv M$
 - ABC ottusangolo
 $\Rightarrow O$ esterno



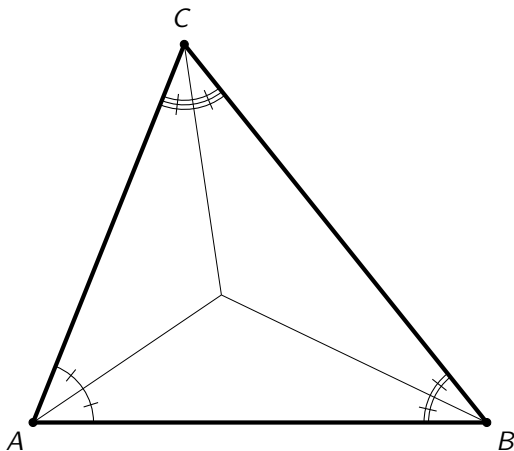
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)



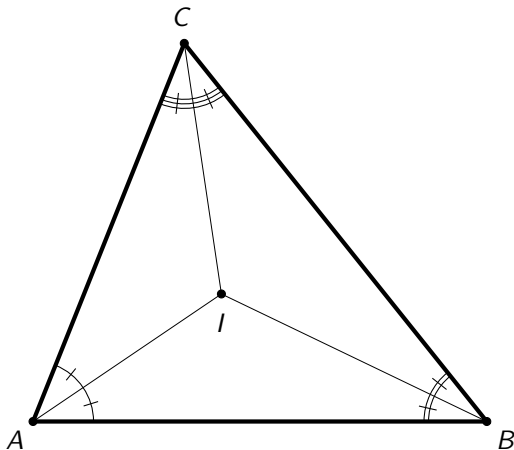
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Bisettrici del triangolo



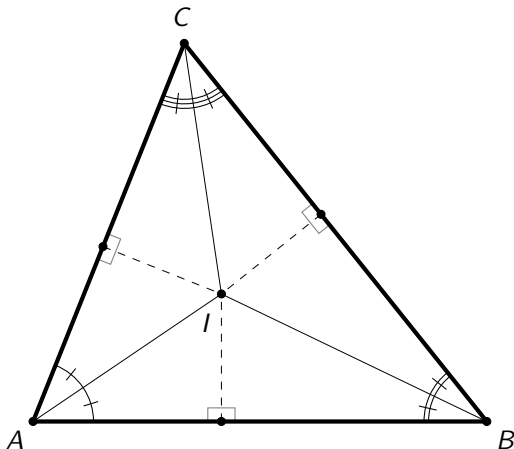
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Bisettrici del triangolo
- *Incentro* I : intersezione delle tre bisettrici



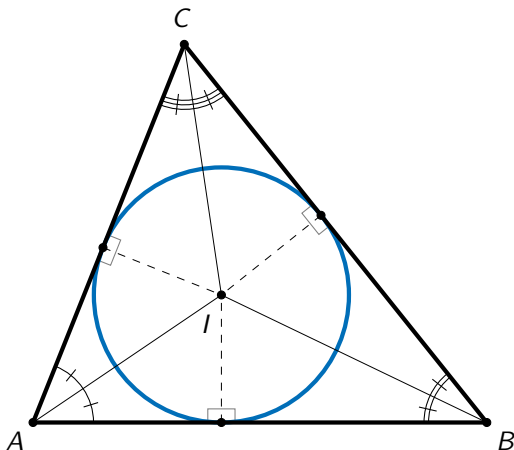
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Bisettrici del triangolo
- *Incentro* I : intersezione delle tre bisettrici
- Proprietà:
 - $\text{dist}(I, AB) = \text{dist}(I, AC) = \text{dist}(I, BC)$



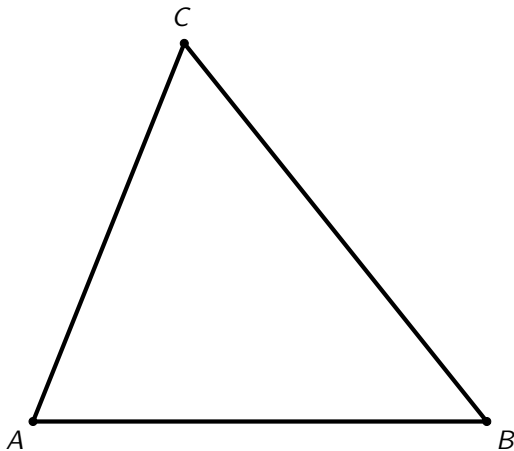
Punti notevoli 2D

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Bisettrici del triangolo
- *Incentro* I : intersezione delle tre bisettrici
- Proprietà:
 - $\text{dist}(I, AB) = \text{dist}(I, AC) = \text{dist}(I, BC)$
 - I centro della circonferenza inscritta



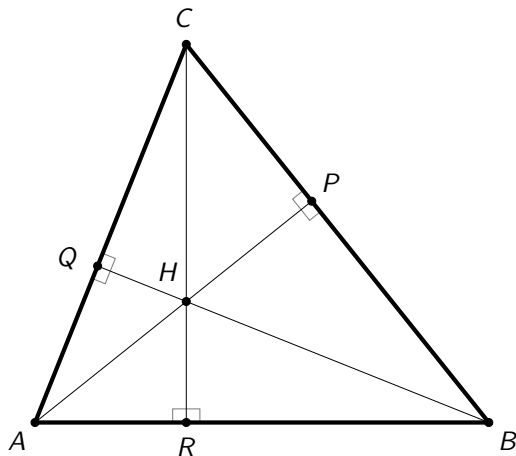
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)



Retta di Eulero

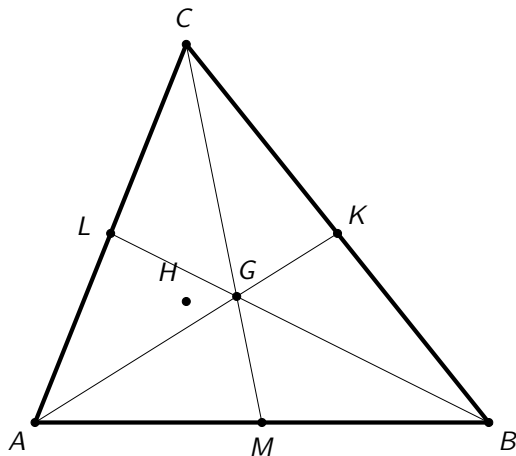
- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H



Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)

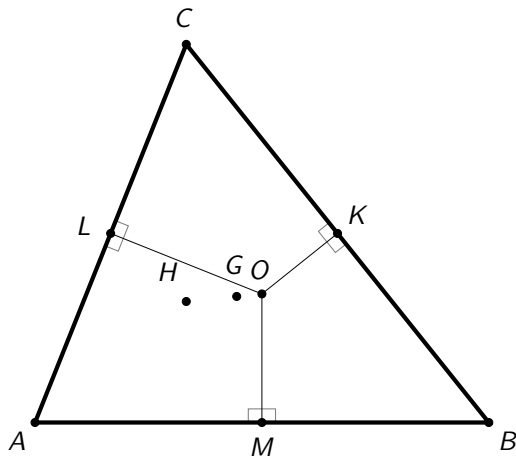
- Ortocentro: H
- Baricentro: G



Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)

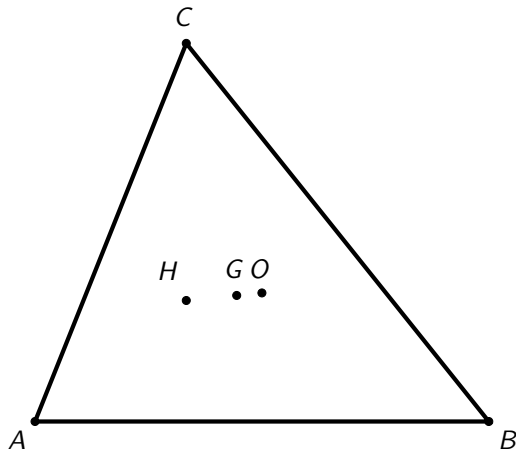
- Ortocentro: H
- Baricentro: G
- Circoentro: O



Retta di Eulero

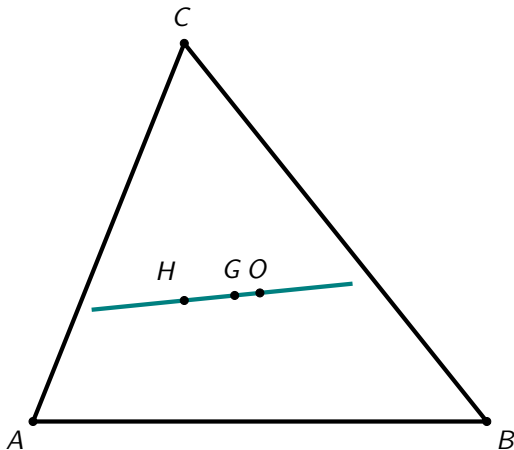
- ABC triangolo (qualsiasi)

- Ortocentro: H
- Baricentro: G
- Circocentro: O



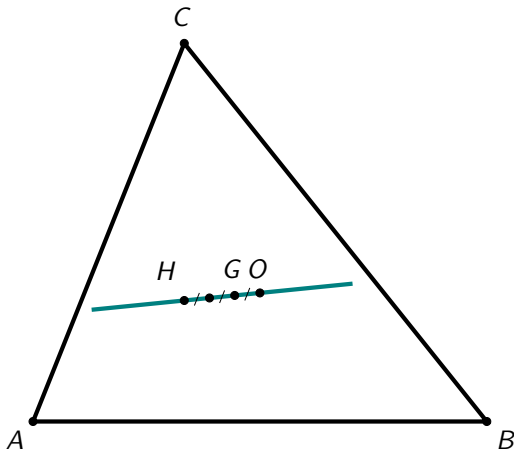
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)



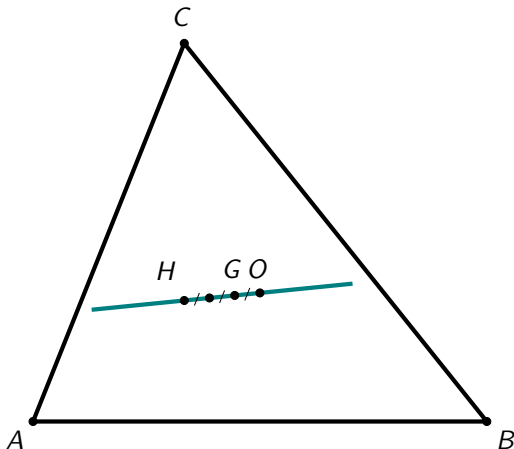
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$



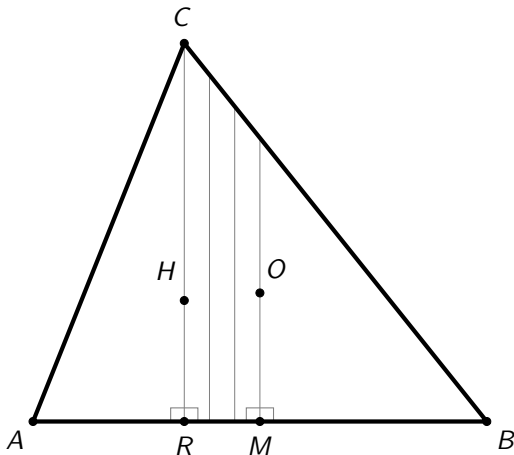
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Dimostrazione in figura



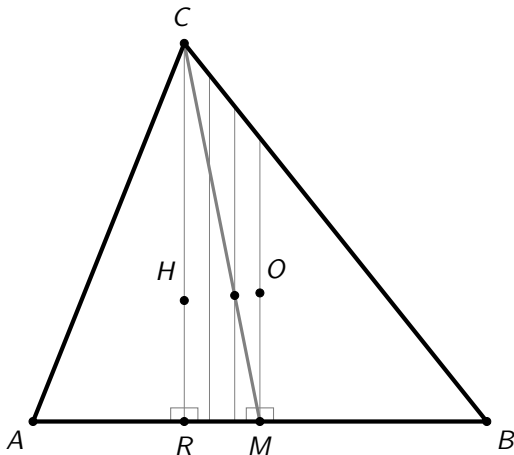
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Dimostrazione in figura



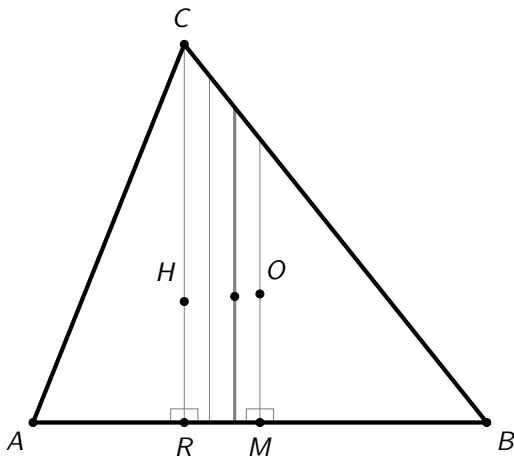
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Dimostrazione in figura



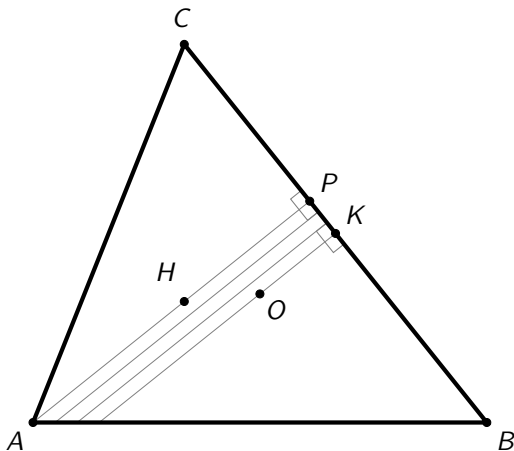
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Dimostrazione in figura



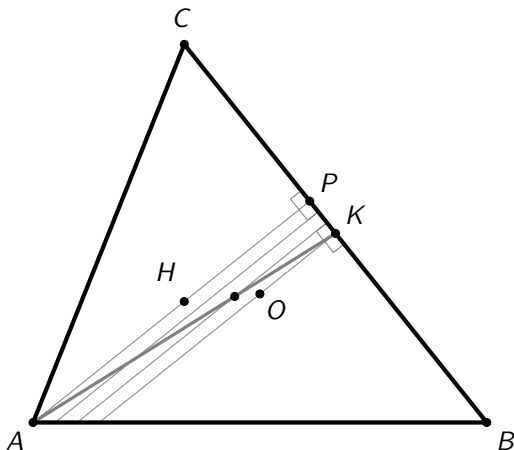
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Dimostrazione in figura



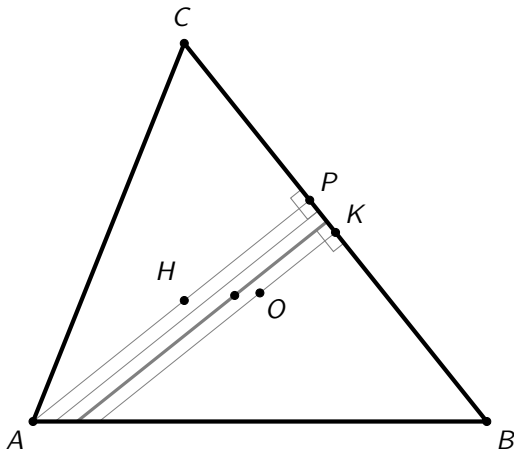
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Dimostrazione in figura



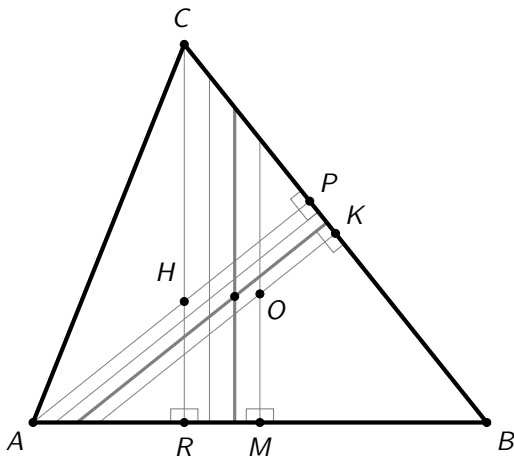
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Dimostrazione in figura



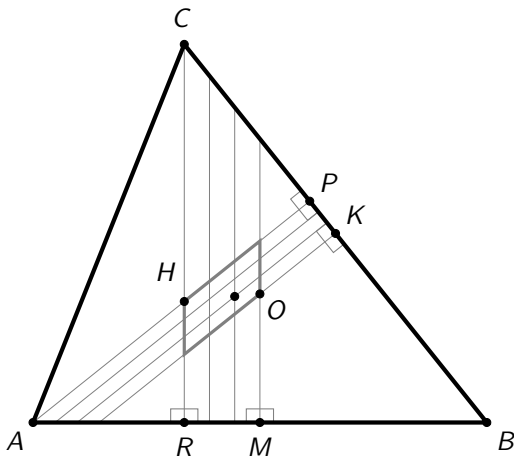
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Dimostrazione in figura



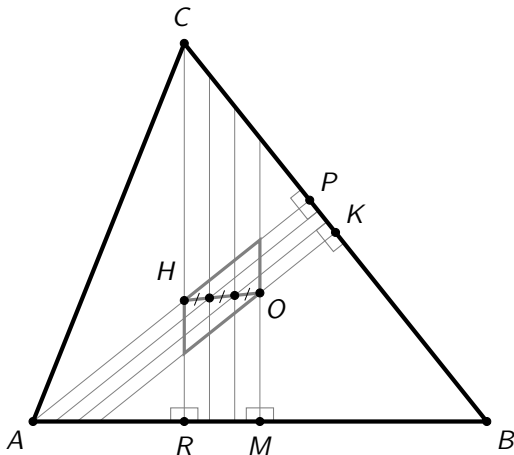
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Dimostrazione in figura



Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Dimostrazione in figura



Retta di Eulero

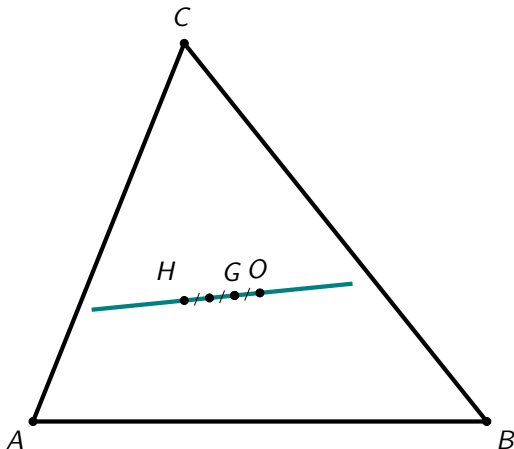
- ABC triangolo (qualsiasi)

- Ortocentro: H
- Baricentro: G
- Circocentro: O

- Proprietà:

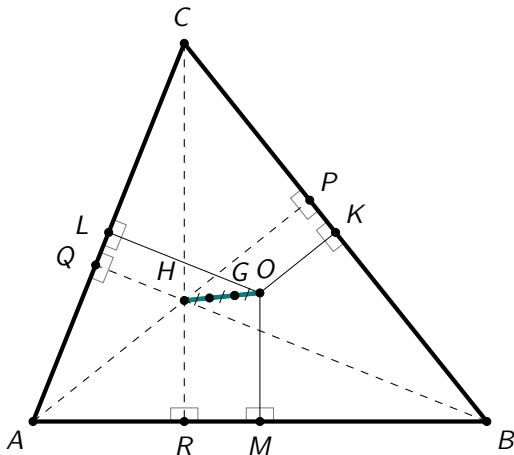
- H, G, O allineati
(*retta di Eulero*)
- $HG = 2GO$

- Dimostrazione in figura ✓



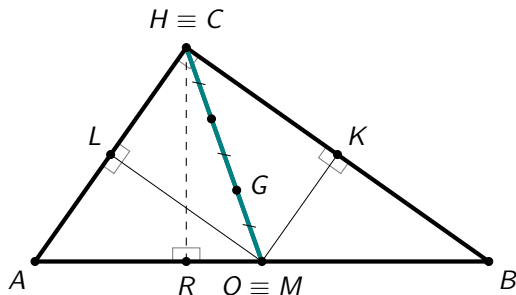
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Guardiamo i tre casi:
 - ABC acutangolo



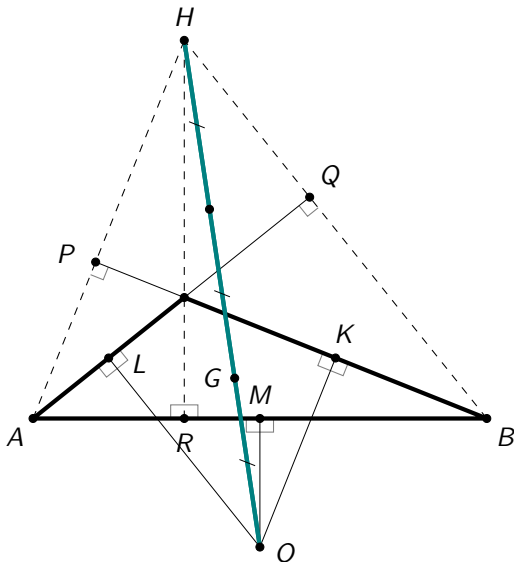
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circoentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Guardiamo i tre casi:
 - ABC acutangolo
 - ABC rettangolo



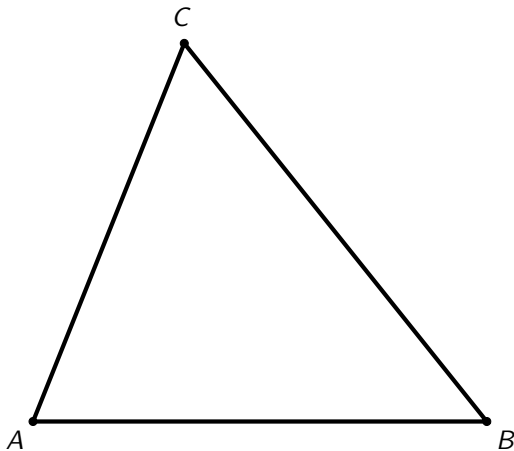
Retta di Eulero

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Ortocentro: H
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
- Proprietà:
 - H, G, O allineati (*retta di Eulero*)
 - $HG = 2GO$
- Guardiamo i tre casi:
 - ABC acutangolo
 - ABC rettangolo
 - ABC ottusangolo



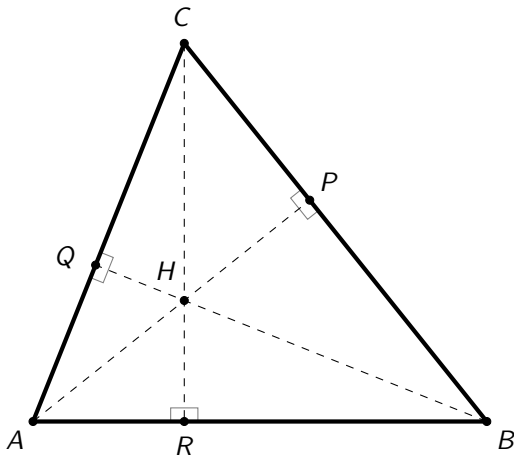
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)



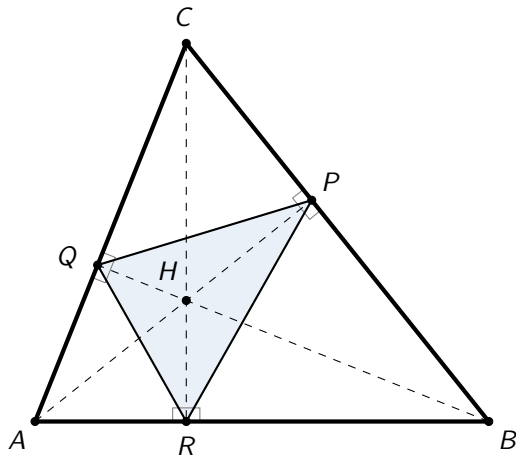
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H



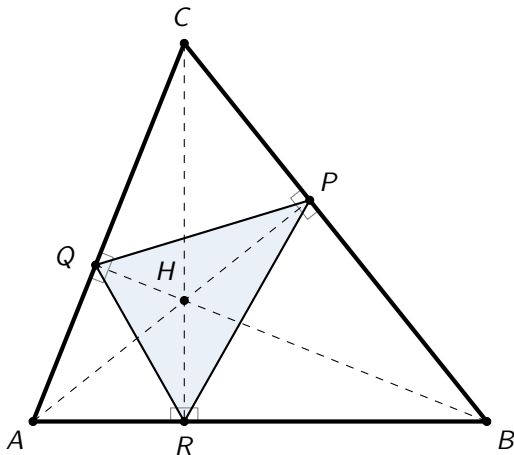
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR



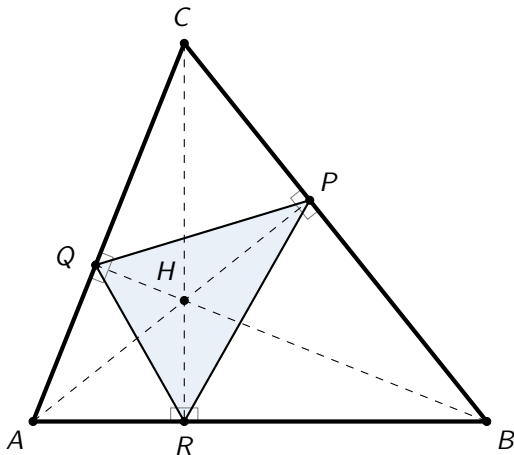
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di \widehat{QRP}



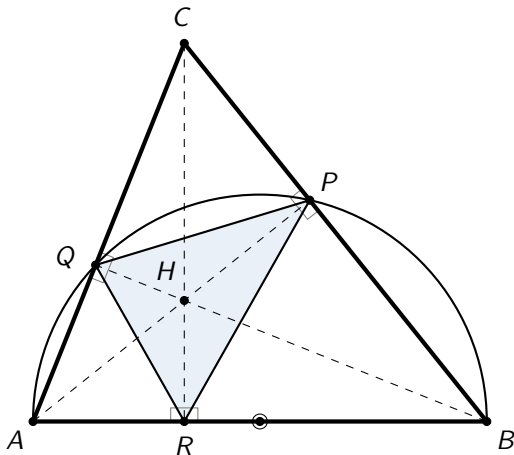
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di $\widehat{Q\hat{R}P}$
- Dimostrazione in figura



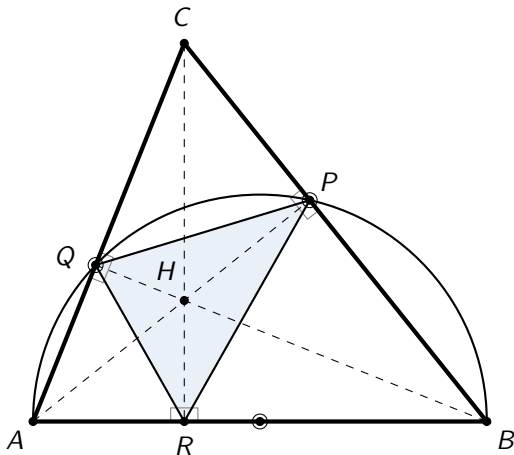
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di \widehat{QRP}
- Dimostrazione in figura



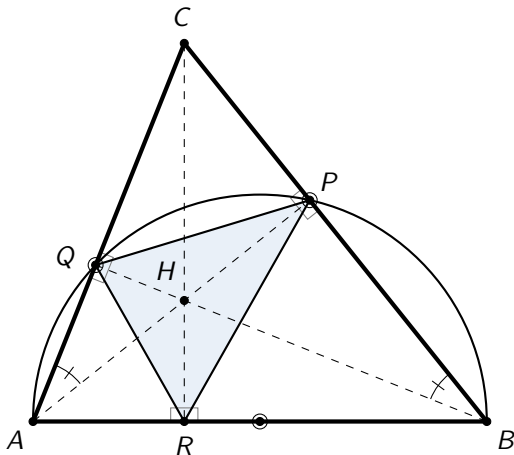
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di $\widehat{Q\hat{R}P}$
- Dimostrazione in figura



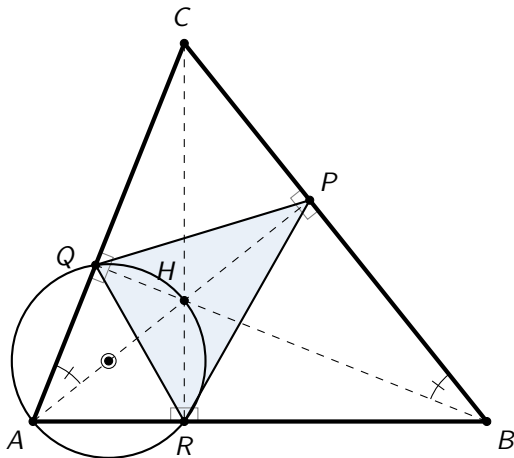
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di \widehat{QRP}
- Dimostrazione in figura



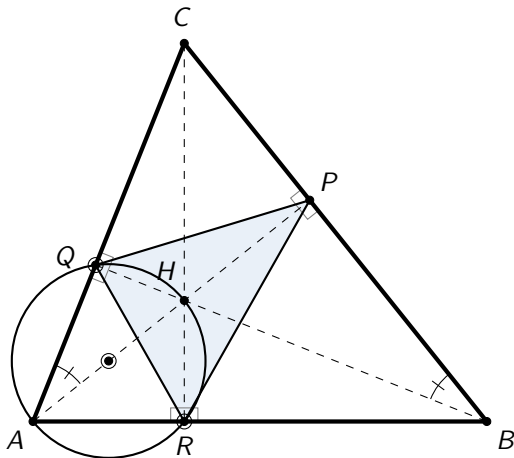
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di \widehat{QRP}
- Dimostrazione in figura



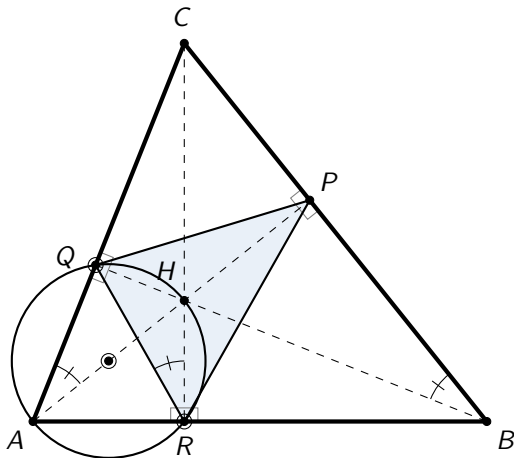
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di $\widehat{Q\hat{R}P}$
- Dimostrazione in figura



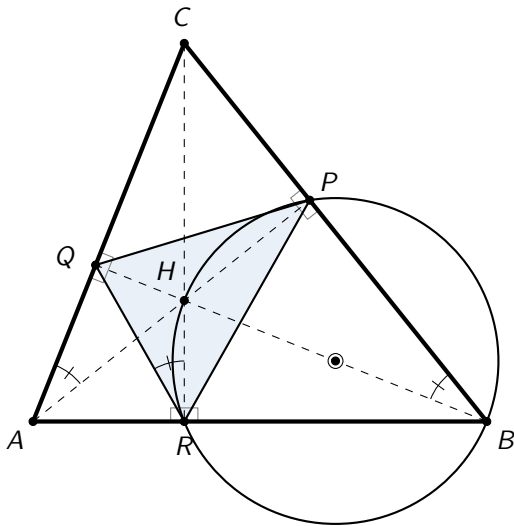
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di \widehat{QRP}
- Dimostrazione in figura



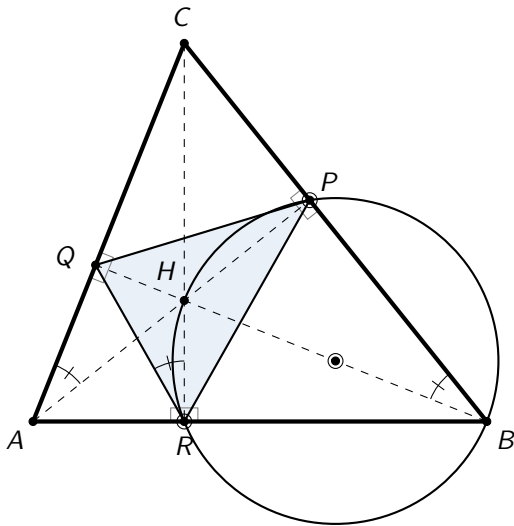
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di \widehat{QRP}
- Dimostrazione in figura



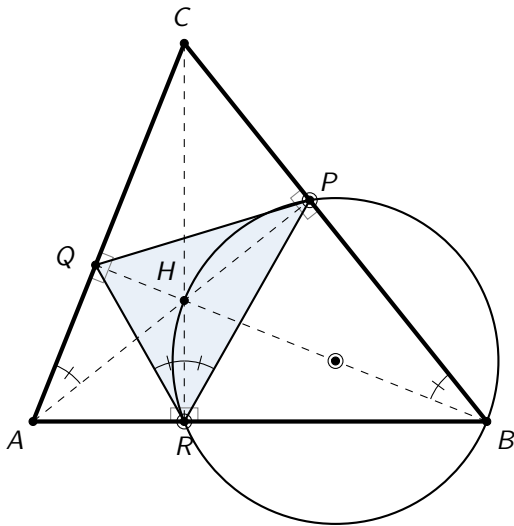
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di \widehat{QRP}
- Dimostrazione in figura



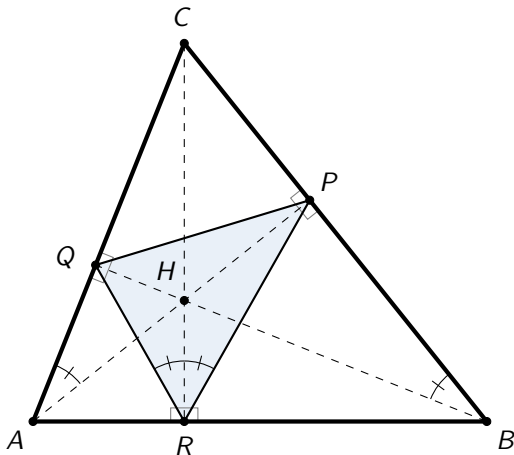
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di \widehat{QRP}
- Dimostrazione in figura



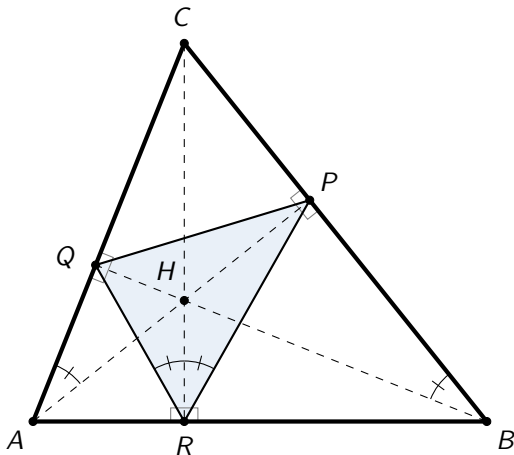
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di \widehat{QRP}
- Dimostrazione in figura ✓



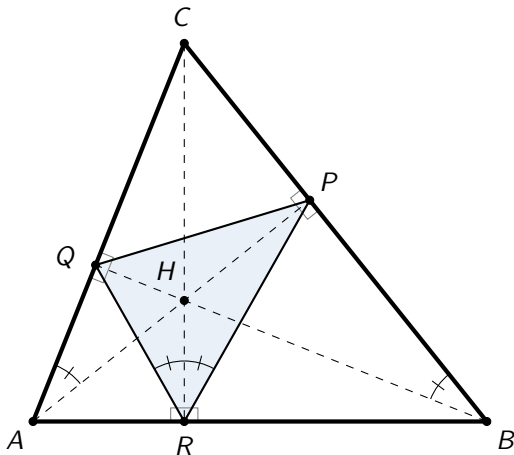
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di $\widehat{Q\hat{R}P}$
- Analogamente
 - BQ bisettrice di $\widehat{P\hat{Q}R}$



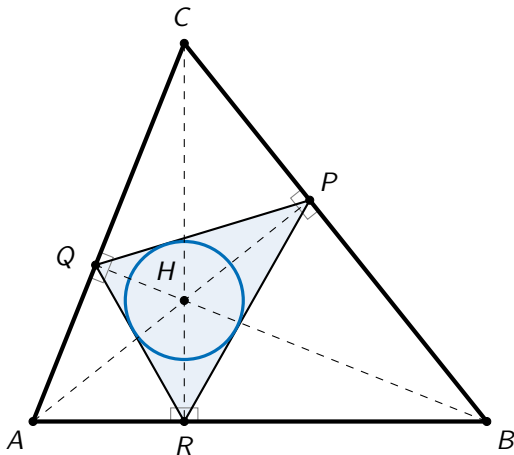
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Triangolo ortico*: PQR
- Proprietà:
 - CR bisettrice di \widehat{QRP}
- Analogamente
 - BQ bisettrice di \widehat{PQR}
 - AP bisettrice di \widehat{QPR}



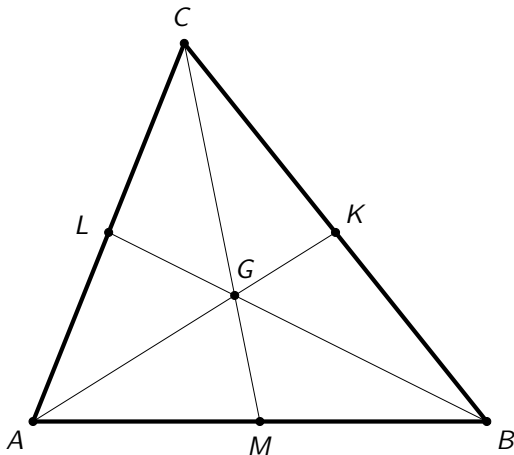
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
 - *Triangolo ortico*: PQR
 - Proprietà:
 - CR bisettrice di $\widehat{Q\hat{R}P}$
 - Analogamente
 - BQ bisettrice di $\widehat{P\hat{Q}R}$
 - AP bisettrice di $\widehat{Q\hat{P}R}$
- $\Rightarrow H$ è l'incentro di PQR



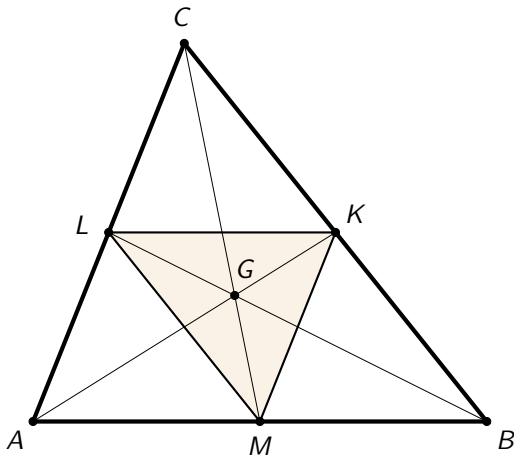
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Mediane: AK , BL , CM
 - Baricentro: G



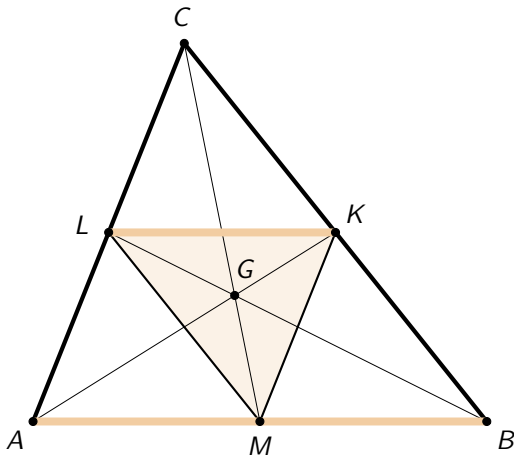
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Mediane: AK , BL , CM
 - Baricentro: G
- *Triangolo mediale*: KLM



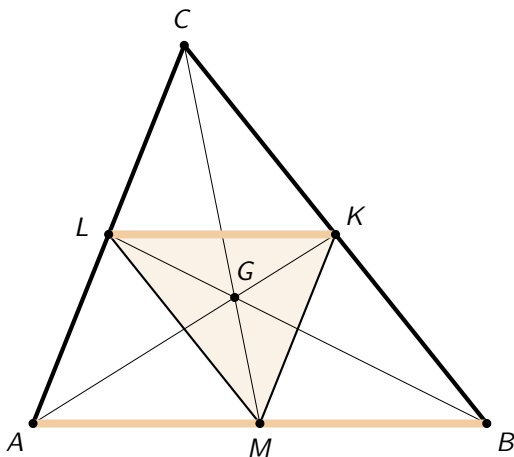
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Mediane: AK , BL , CM
 - Baricentro: G
- *Triangolo mediale*: KLM
- Proprietà:
 - $LK \parallel AB$



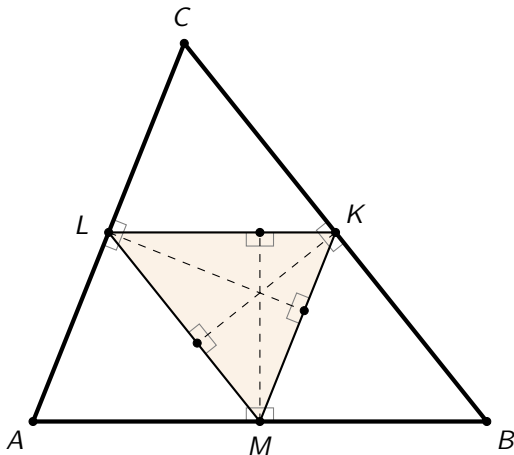
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Mediane: AK , BL , CM
 - Baricentro: G
- *Triangolo mediale*: KLM
- Proprietà:
 - $LK \parallel AB$
 - $LK = \frac{1}{2}AB$



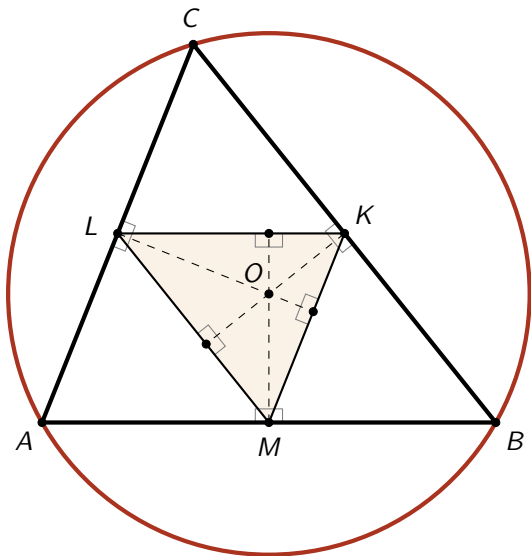
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Mediane: AK , BL , CM
 - Baricentro: G
- *Triangolo mediale*: KLM
- Proprietà:
 - Gli assi di ABC sono le altezze di KLM



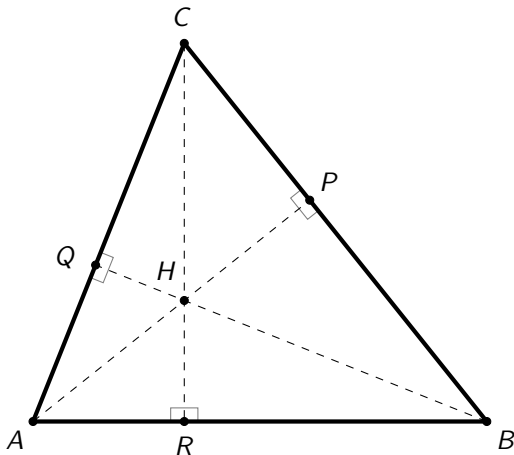
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Mediane: AK , BL , CM
 - Baricentro: G
- *Triangolo mediale*: KLM
- Proprietà:
 - Gli assi di ABC sono le altezze di KLM
 - Il circocentro O del triangolo ABC è l'ortocentro di KLM



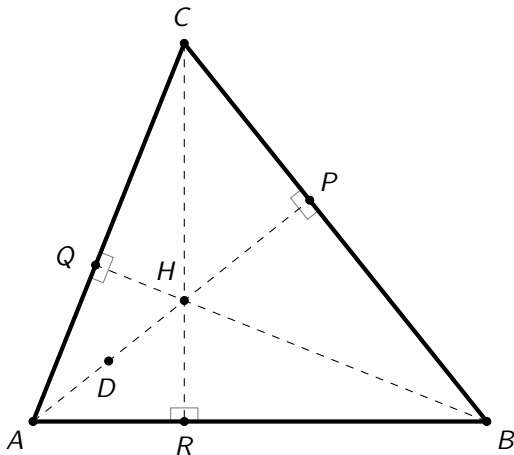
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H



Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Punti di Eulero*:
 - D (punto medio di AH)



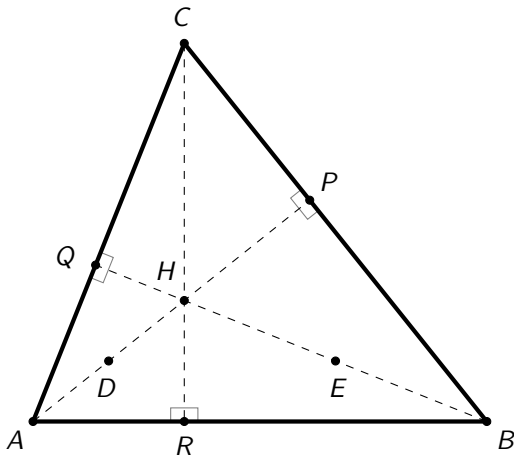
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)

- Altezze: AP , BQ , CR
- Ortocentro: H

- *Punti di Eulero:*

- D (punto medio di AH)
- E (punto medio di BH)



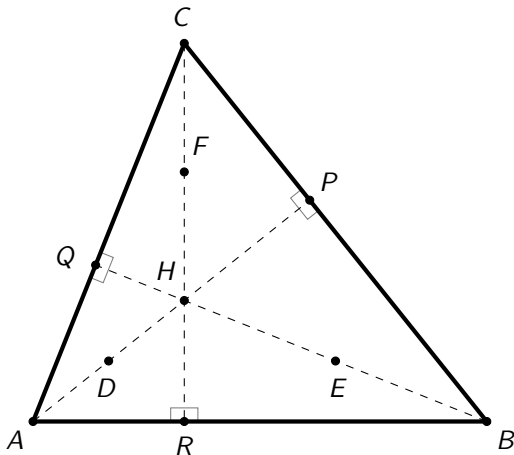
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)

- Altezze: AP , BQ , CR
- Ortocentro: H

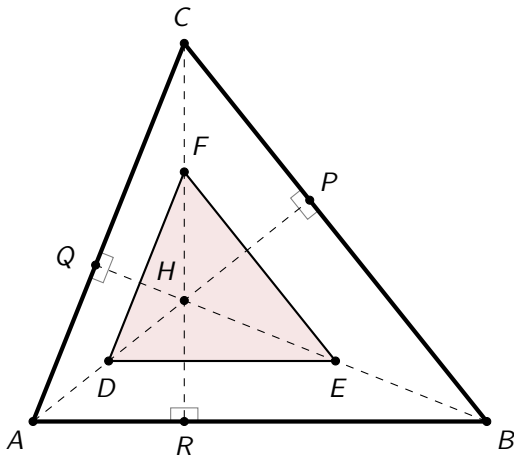
- *Punti di Eulero:*

- D (punto medio di AH)
- E (punto medio di BH)
- F (punto medio di CH)



Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Punti di Eulero*:
 - D (punto medio di AH)
 - E (punto medio di BH)
 - F (punto medio di CH)
- *Triangolo di Eulero*: DEF



Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)

- Altezze: AP , BQ , CR
- Ortocentro: H

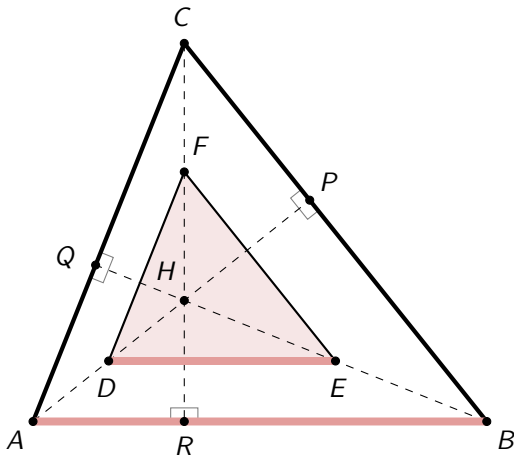
- *Punti di Eulero:*

- D (punto medio di AH)
- E (punto medio di BH)
- F (punto medio di CH)

- *Triangolo di Eulero:* DEF

- Proprietà:

- $DE \parallel AB$



Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)

- Altezze: AP , BQ , CR
- Ortocentro: H

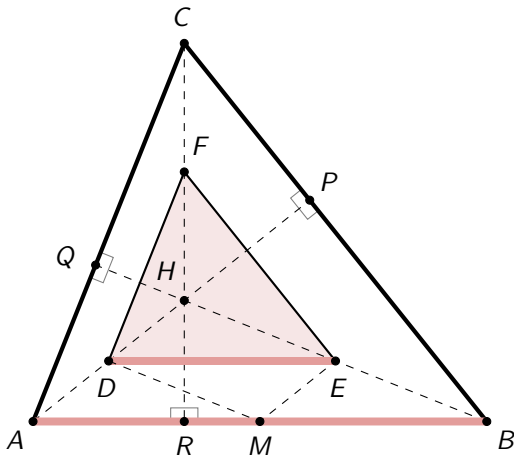
- *Punti di Eulero:*

- D (punto medio di AH)
- E (punto medio di BH)
- F (punto medio di CH)

- *Triangolo di Eulero:* DEF

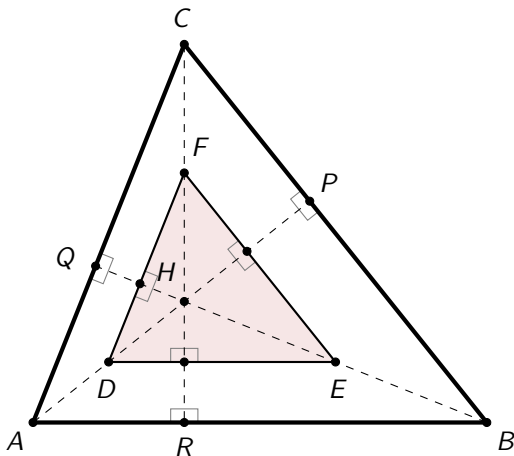
- Proprietà:

- $DE \parallel AB$
- $DE = \frac{1}{2}AB$



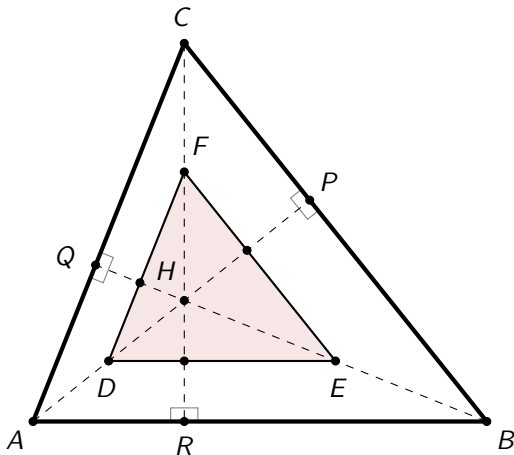
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Punti di Eulero*:
 - D (punto medio di AH)
 - E (punto medio di BH)
 - F (punto medio di CH)
- *Triangolo di Eulero*: DEF
- Proprietà:
 - L'ortocentro H di ABC è anche l'ortocentro del triangolo DEF



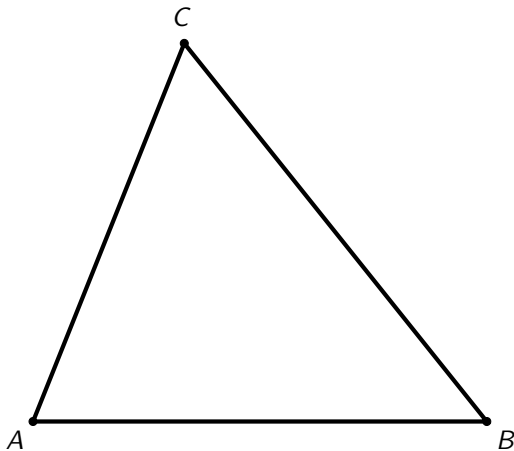
Triangoli notevoli

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Altezze: AP , BQ , CR
 - Ortocentro: H
- *Punti di Eulero*:
 - D (punto medio di AH)
 - E (punto medio di BH)
 - F (punto medio di CH)
- *Triangolo di Eulero*: DEF
- Sintesi:
 - L'omotetia di centro H e rapporto $1/2$ manda ABC in DEF



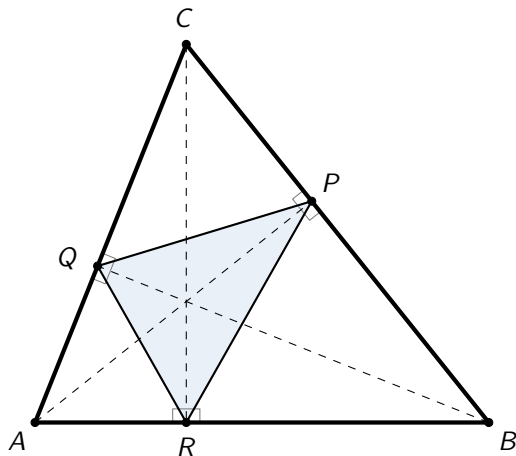
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)



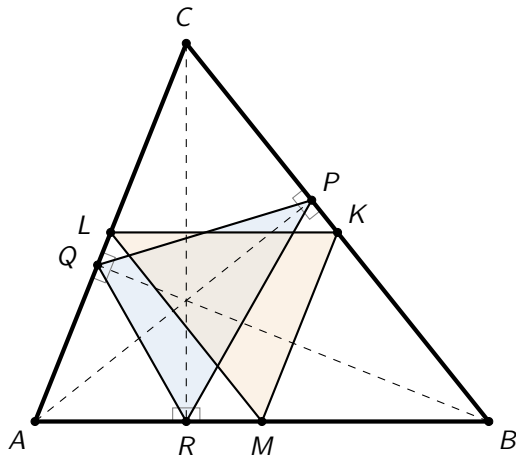
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Triangolo ortico: PQR



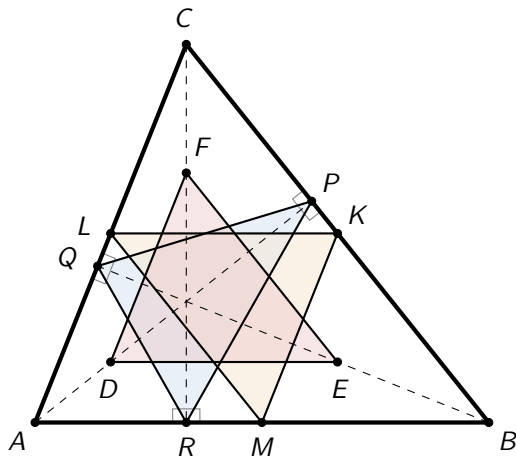
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Triangolo ortico: PQR
 - Triangolo mediale: KLM



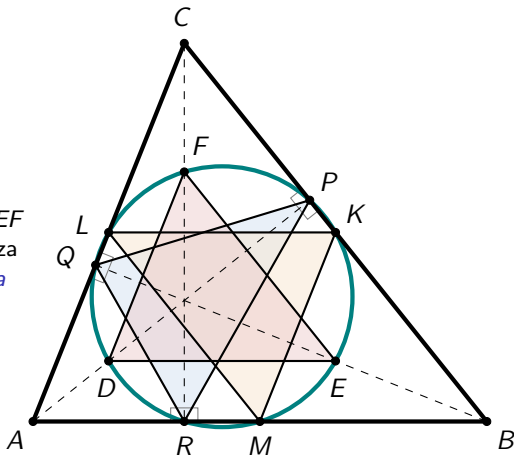
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Triangolo ortico: PQR
 - Triangolo mediale: KLM
 - Triangolo di Eulero: DEF



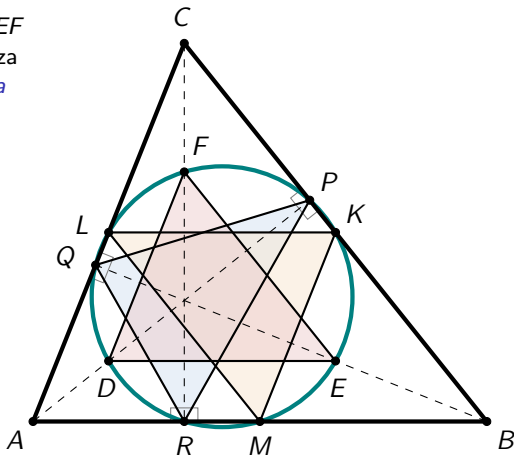
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Triangolo ortico: PQR
 - Triangolo mediale: KLM
 - Triangolo di Eulero: DEF
- Proprietà 1:
 - I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)



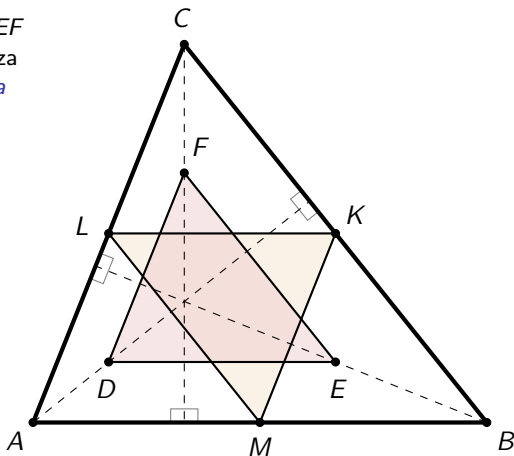
Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:
 - I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)
- Dimostrazione:



Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:
 - I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)
- Dimostrazione:
 - Partiamo da KLM e DEF



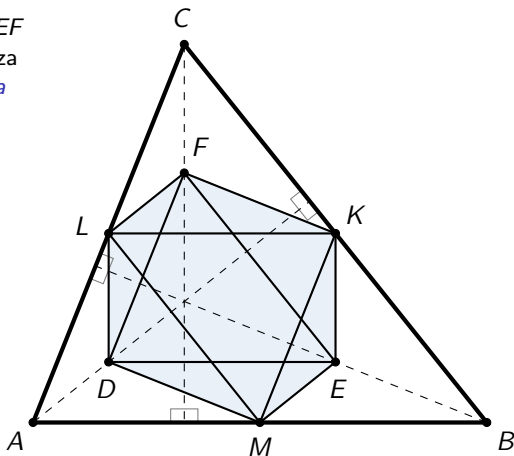
Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:

- I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)

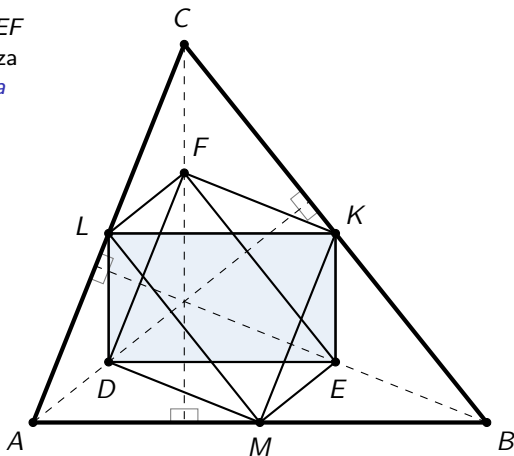
- Dimostrazione:

- Partiamo da KLM e DEF
- Consideriamo l'esagono $DMEKFL$ (*esagono di Eulero*)



Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:
 - I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)
- Dimostrazione:
 - Partiamo da KLM e DEF
 - Consideriamo l'esagono $DMEKFL$ (*esagono di Eulero*)
 - Mostriamo che i tre quadrilateri $DEKL$



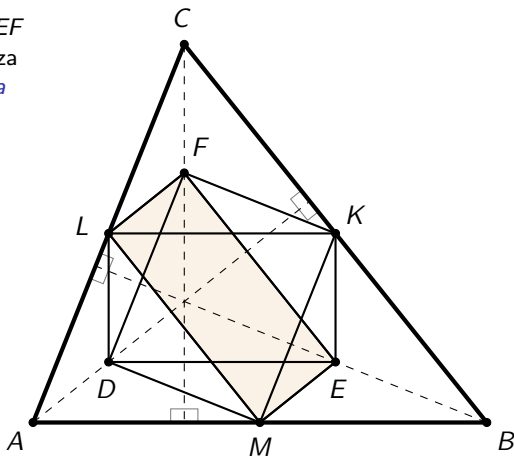
Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:

- I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)

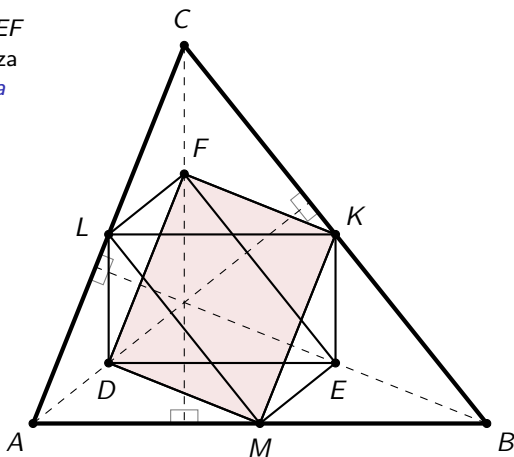
- Dimostrazione:

- Partiamo da KLM e DEF
- Consideriamo l'esagono $DMEKFL$ (*esagono di Eulero*)
- Mostriamo che i tre quadrilateri $DEKL$, $EFLM$



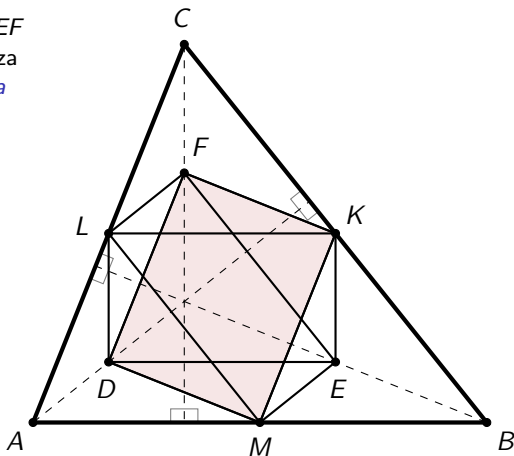
Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:
 - I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)
- Dimostrazione:
 - Partiamo da KLM e DEF
 - Consideriamo l'esagono $DMEKFL$ (*esagono di Eulero*)
 - Mostriamo che i tre quadrilateri $DEKL$, $EFLM$, $FDMK$



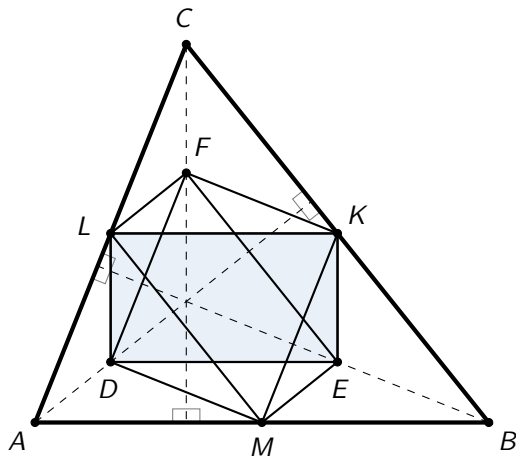
Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:
 - I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)
- Dimostrazione:
 - Partiamo da KLM e DEF
 - Consideriamo l'esagono $DMEKFL$ (*esagono di Eulero*)
 - Mostriamo che i tre quadrilateri $DEKL$, $EFLM$, $FDMK$ sono dei rettangoli (*rettangoli di Eulero*)



Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:
 - Partiamo da $DEKL$



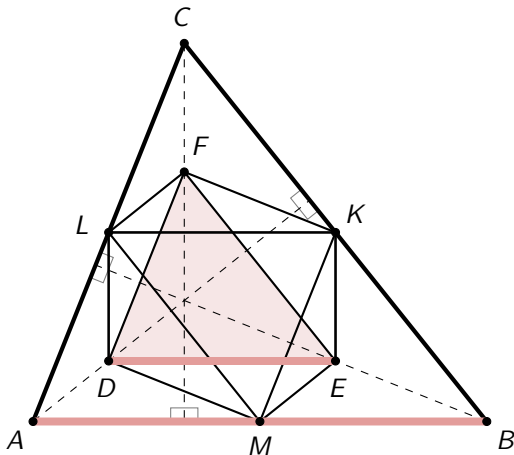
Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- Partiamo da $DEKL$

- $LK \parallel AB$ e $LK = \frac{1}{2}AB$

- $DE \parallel AB$ e $DE = \frac{1}{2}AB$



Circonferenza dei nove punti

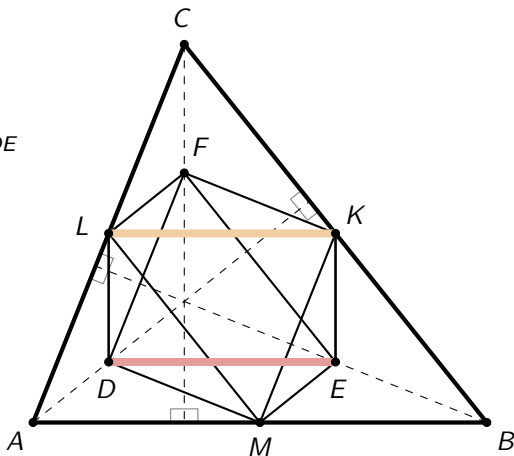
- Dimostrazione:

- Partiamo da $DEKL$

- $LK \parallel AB$ e $LK = \frac{1}{2}AB$

- $DE \parallel AB$ e $DE = \frac{1}{2}AB$

- $\Rightarrow LK \parallel DE$ e $LK = DE$



Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

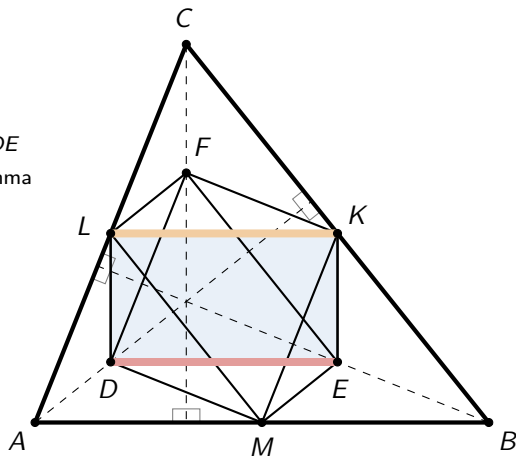
- Partiamo da $DEKL$

- $LK \parallel AB$ e $LK = \frac{1}{2}AB$

- $DE \parallel AB$ e $DE = \frac{1}{2}AB$

- $\Rightarrow LK \parallel DE$ e $LK = DE$

- $\Rightarrow DEKL$ parallelogramma

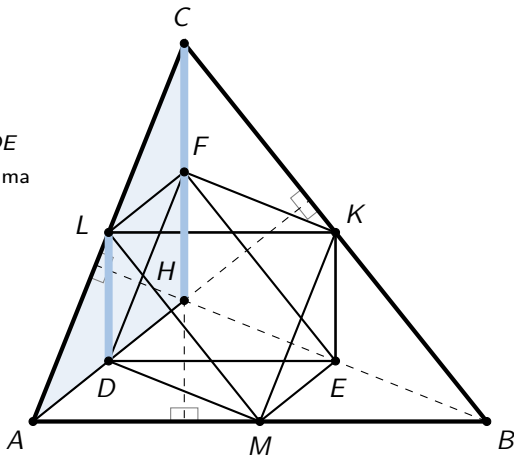


Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- Partiamo da $DEKL$

- $LK \parallel AB$ e $LK = \frac{1}{2}AB$
- $DE \parallel AB$ e $DE = \frac{1}{2}AB$
 $\Rightarrow LK \parallel DE$ e $LK = DE$
 $\Rightarrow DEKL$ parallelogramma
- $DL \parallel HC$

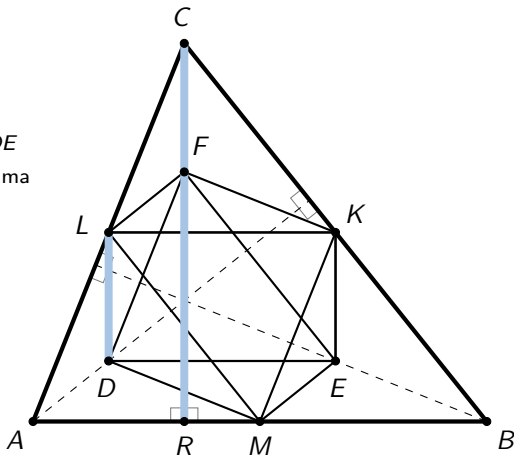


Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- Partiamo da $DEKL$

- $LK \parallel AB$ e $LK = \frac{1}{2}AB$
- $DE \parallel AB$ e $DE = \frac{1}{2}AB$
 $\Rightarrow LK \parallel DE$ e $LK = DE$
 $\Rightarrow DEKL$ parallelogramma
- $DL \parallel CR$

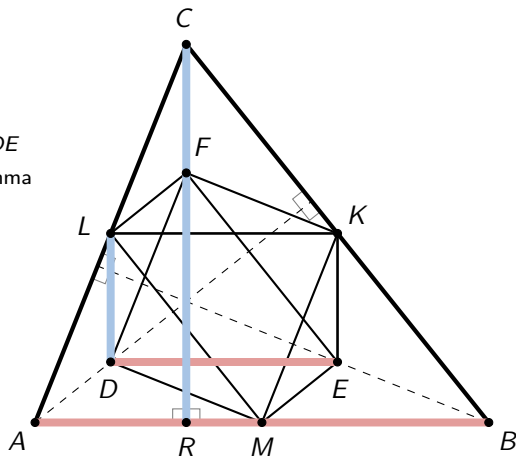


Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- Partiamo da $DEKL$

- $LK \parallel AB$ e $LK = \frac{1}{2}AB$
- $DE \parallel AB$ e $DE = \frac{1}{2}AB$
 $\Rightarrow LK \parallel DE$ e $LK = DE$
 $\Rightarrow DEKL$ parallelogramma
- $DL \parallel CR$ e $DE \parallel AB$

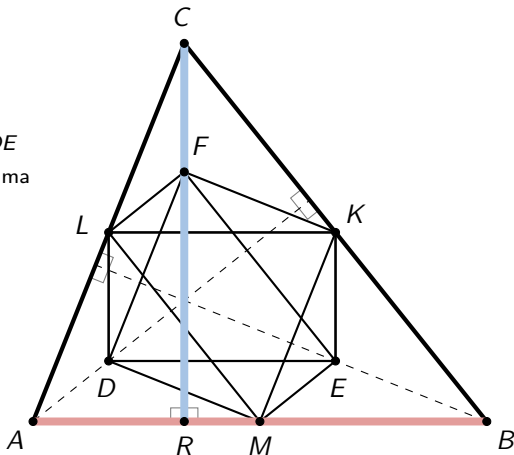


Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- Partiamo da $DEKL$

- $LK \parallel AB$ e $LK = \frac{1}{2}AB$
- $DE \parallel AB$ e $DE = \frac{1}{2}AB$
 $\Rightarrow LK \parallel DE$ e $LK = DE$
 $\Rightarrow DEKL$ parallelogramma
- $DL \parallel CR$ e $DE \parallel AB$
 $CR \perp AB$

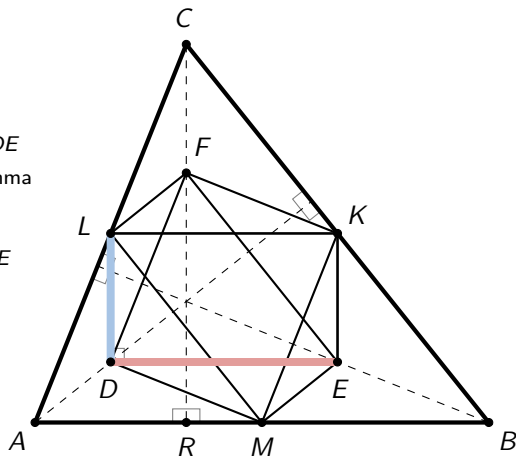


Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- Partiamo da $DEKL$

- $LK \parallel AB$ e $LK = \frac{1}{2}AB$
- $DE \parallel AB$ e $DE = \frac{1}{2}AB$
 $\Rightarrow LK \parallel DE$ e $LK = DE$
 $\Rightarrow DEKL$ parallelogramma
- $DL \parallel CR$ e $DE \parallel AB$
 $CR \perp AB \Rightarrow DL \perp DE$

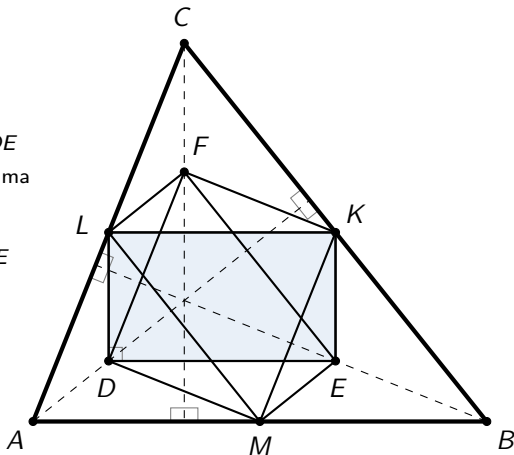


Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

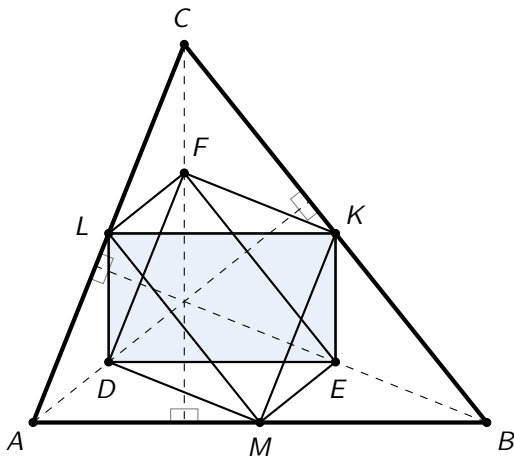
- Partiamo da $DEKL$

- $LK \parallel AB$ e $LK = \frac{1}{2}AB$
- $DE \parallel AB$ e $DE = \frac{1}{2}AB$
 $\Rightarrow LK \parallel DE$ e $LK = DE$
 $\Rightarrow DEKL$ parallelogramma
- $DL \parallel CR$ e $DE \parallel AB$
 $CR \perp AB \Rightarrow DL \perp DE$
 $\Rightarrow DEKL$ rettangolo



Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:
 - $DEKL$ rettangolo ✓



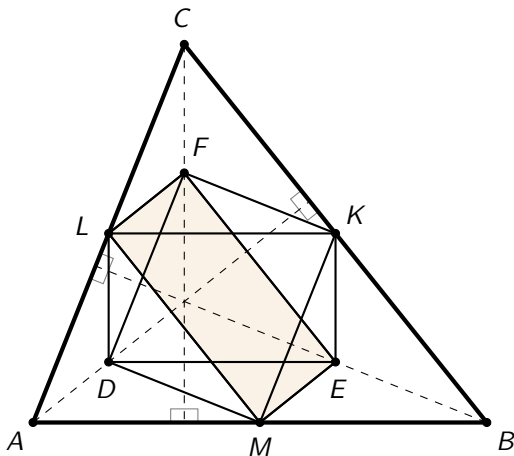
Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- $DEKL$ rettangolo ✓

In modo analogo:

- $EFLM$ rettangolo ✓



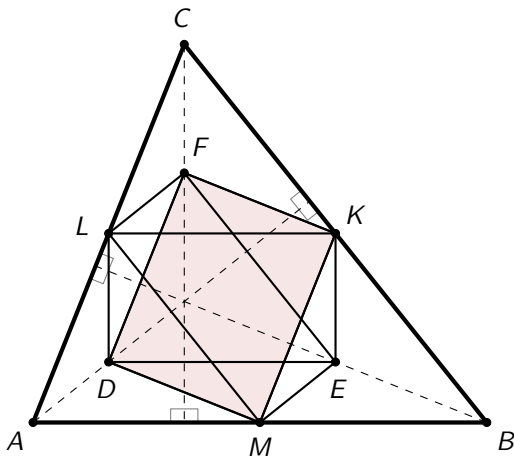
Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- $DEKL$ rettangolo ✓

In modo analogo:

- $EFLM$ rettangolo ✓
- $FDMK$ rettangolo ✓



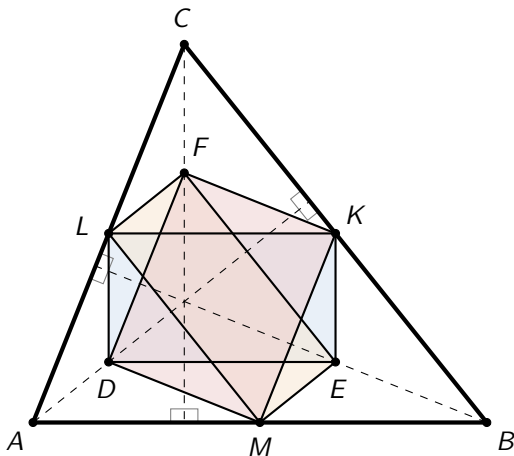
Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- $DEKL$ rettangolo ✓

In modo analogo:

- $EFLM$ rettangolo ✓
- $FDMK$ rettangolo ✓
(*rettangoli di Eulero*)



Circonferenza dei nove punti

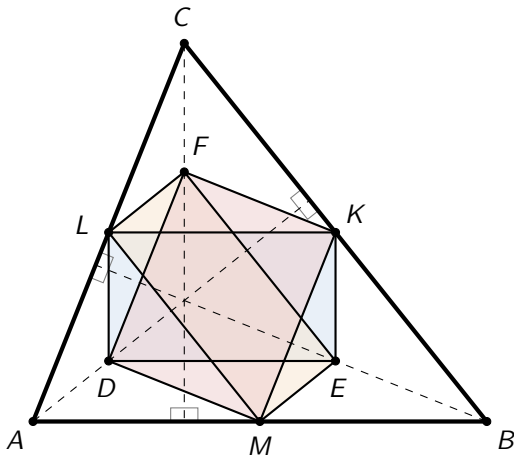
- Dimostrazione:

- $DEKL$ rettangolo ✓

In modo analogo:

- $EFLM$ rettangolo ✓
- $FDMK$ rettangolo ✓
(*rettangoli di Eulero*)

- A due a due hanno una diagonale in comune:



Circonferenza dei nove punti

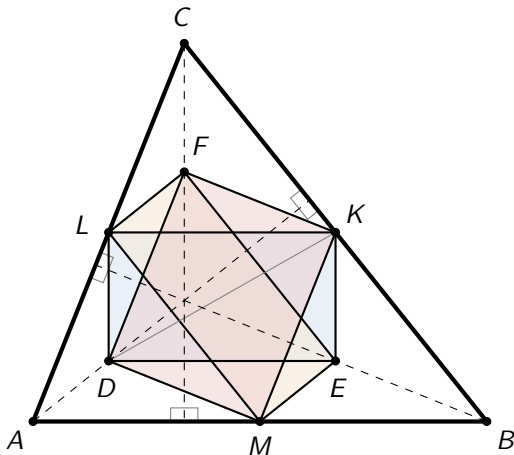
- Dimostrazione:

- $DEKL$ rettangolo ✓

In modo analogo:

- $EFLM$ rettangolo ✓
- $FDMK$ rettangolo ✓
(*rettangoli di Eulero*)

- A due a due hanno una diagonale in comune:
 DK



Circonferenza dei nove punti

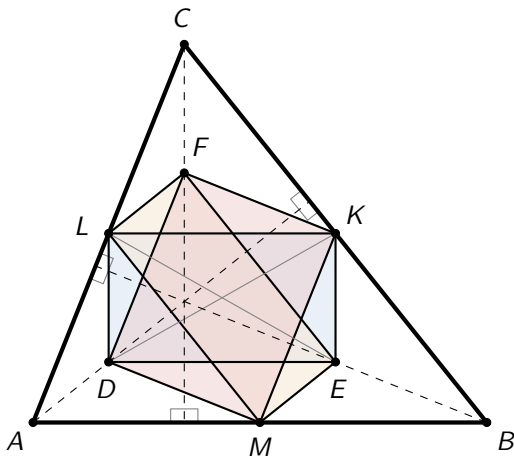
- Dimostrazione:

- $DEKL$ rettangolo ✓

In modo analogo:

- $EFLM$ rettangolo ✓
- $FDMK$ rettangolo ✓
(*rettangoli di Eulero*)

- A due a due hanno una diagonale in comune:
 DK, EL



Circonferenza dei nove punti

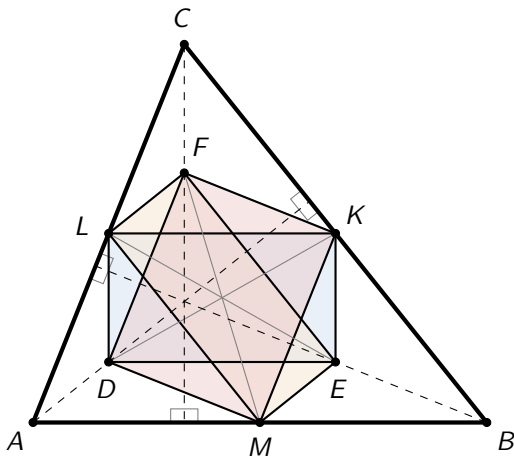
- Dimostrazione:

- $DEKL$ rettangolo ✓

In modo analogo:

- $EFLM$ rettangolo ✓
- $FDMK$ rettangolo ✓
(*rettangoli di Eulero*)

- A due a due hanno una diagonale in comune:
 DK , EL , FM



Circonferenza dei nove punti

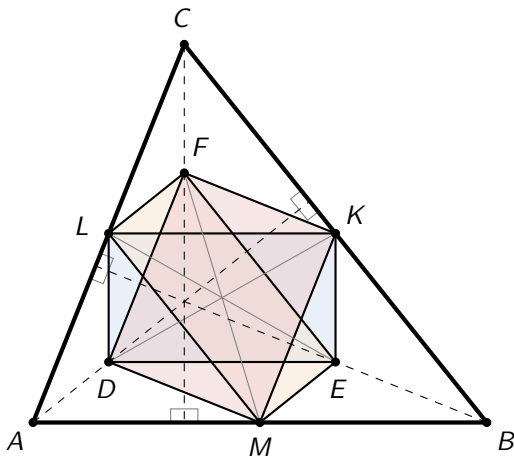
- Dimostrazione:

- $DEKL$ rettangolo ✓

In modo analogo:

- $EFLM$ rettangolo ✓
- $FDMK$ rettangolo ✓
(*rettangoli di Eulero*)

- A due a due hanno una diagonale in comune:
 DK , EL , FM (*diagonali o diametri di Eulero*)



Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

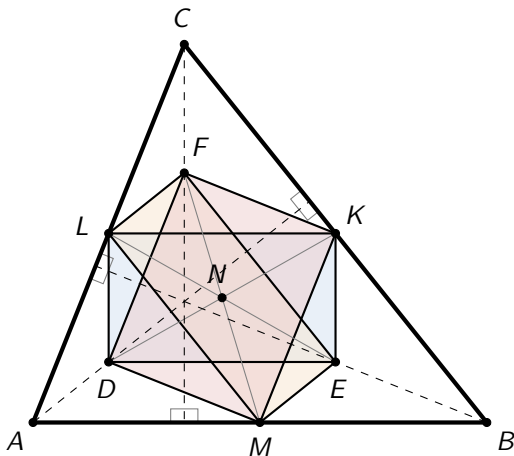
- $DEKL$ rettangolo ✓

In modo analogo:

- $EFLM$ rettangolo ✓
- $FDMK$ rettangolo ✓
(*rettangoli di Eulero*)

- A due a due hanno una diagonale in comune:
 DK , EL , FM (*diagonali o diametri di Eulero*)

- I tre rettangoli hanno lo stesso centro N , punto medio delle diagonali



Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

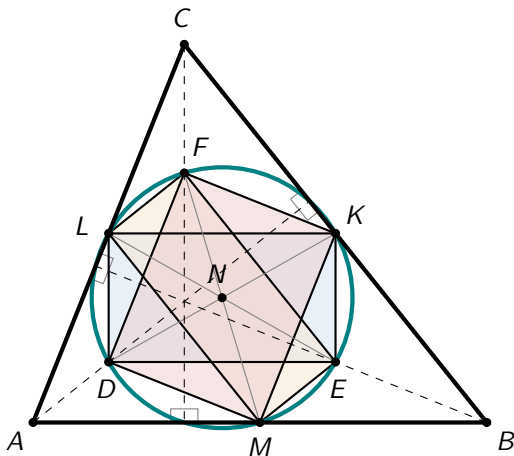
- $DEKL$ rettangolo ✓

In modo analogo:

- $EFLM$ rettangolo ✓
- $FDMK$ rettangolo ✓
(*rettangoli di Eulero*)

- A due a due hanno una diagonale in comune:
 DK , EL , FM (*diagonali o diametri di Eulero*)

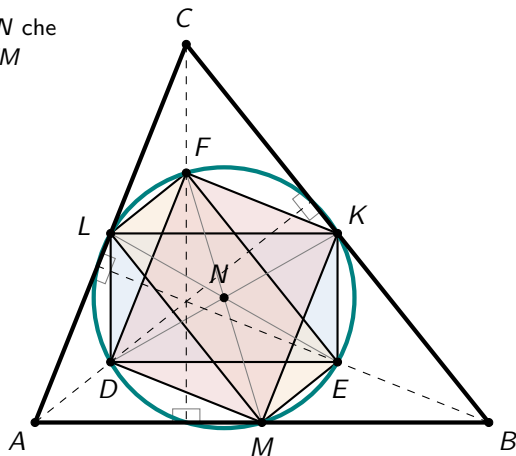
- I tre rettangoli hanno lo stesso centro N , punto medio delle tre diagonali, e la stessa circonferenza circoscritta Γ



Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

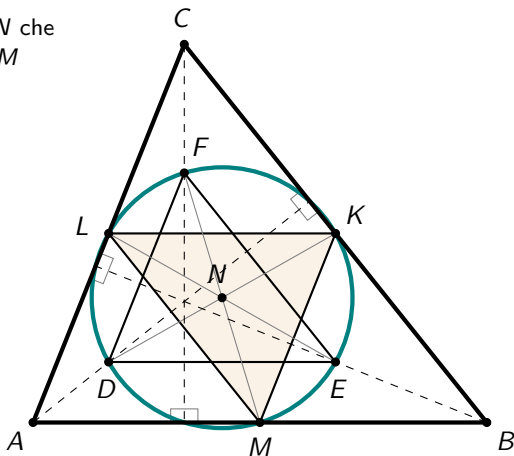
- Γ : circonferenza di centro N che ha per diametri DK , EL , FM



Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

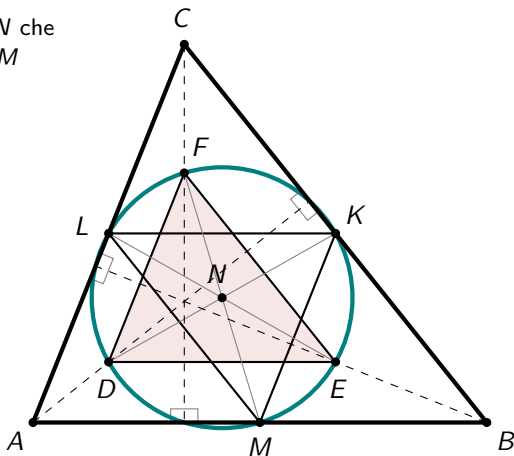
- Γ : circonferenza di centro N che ha per diametri DK , EL , FM
- Γ è circoscritta a KLM ✓



Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

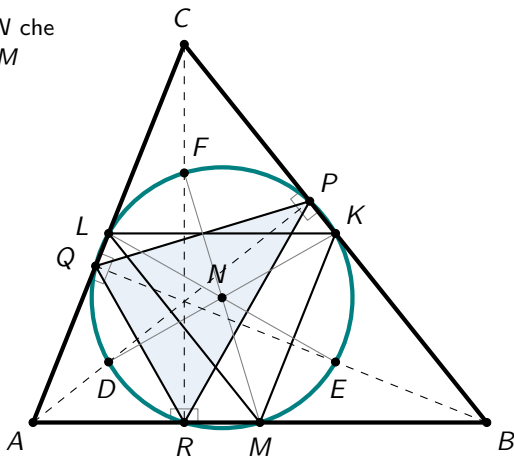
- Γ : circonferenza di centro N che ha per diametri DK , EL , FM
- Γ è circoscritta a KLM ✓
- Γ è circoscritta a DEF ✓



Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- Γ : circonferenza di centro N che ha per diametri DK , EL , FM
- Γ è circoscritta a KLM ✓
- Γ è circoscritta a DEF ✓
- E il triangolo ortico PQR ?

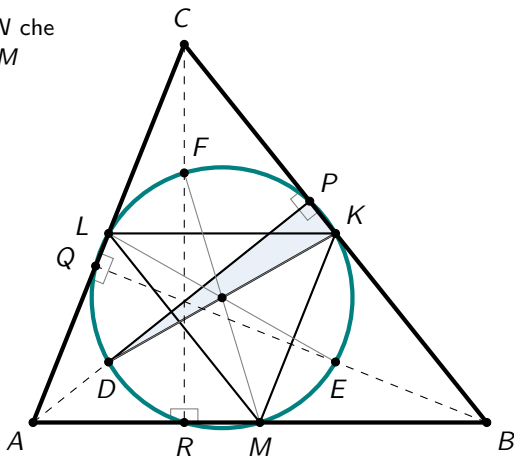


Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- Γ : circonferenza di centro N che ha per diametri DK , EL , FM
- Γ è circoscritta a KLM ✓
- Γ è circoscritta a DEF ✓
- E il triangolo ortico PQR ?

$\left. \begin{array}{l} DK \text{ diametro} \\ \widehat{DPK} \text{ retto} \end{array} \right\} \Rightarrow P \in \Gamma$



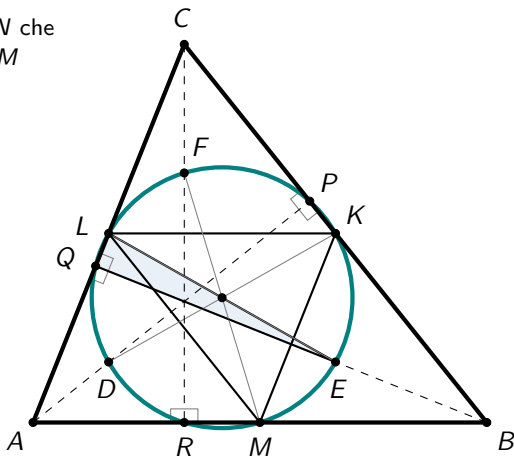
Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- Γ : circonferenza di centro N che ha per diametri DK , EL , FM
- Γ è circoscritta a KLM ✓
- Γ è circoscritta a DEF ✓
- E il triangolo ortico PQR ?

$$\left. \begin{array}{l} DK \text{ diametro} \\ \widehat{DPK} \text{ retto} \end{array} \right\} \Rightarrow P \in \Gamma$$

$$\left. \begin{array}{l} EL \text{ diametro} \\ \widehat{EQL} \text{ retto} \end{array} \right\} \Rightarrow Q \in \Gamma$$



Circonferenza dei nove punti

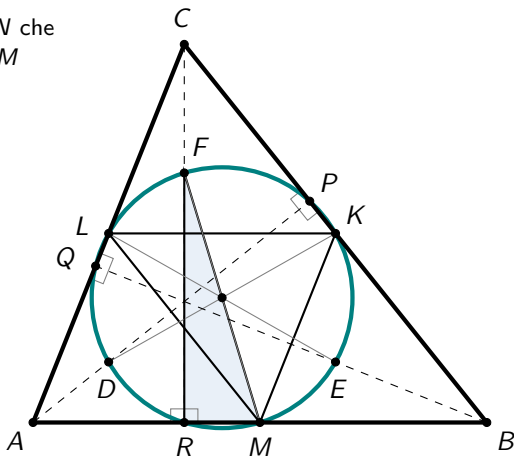
- Dimostrazione:

- Γ : circonferenza di centro N che ha per diametri DK , EL , FM
- Γ è circoscritta a KLM ✓
- Γ è circoscritta a DEF ✓
- E il triangolo ortico PQR ?

DK diametro } $\Rightarrow P \in \Gamma$
 $D\hat{P}K$ retto }

EL diametro } $\Rightarrow Q \in \Gamma$
 $E\hat{Q}L$ retto }

FM diametro } $\Rightarrow R \in \Gamma$
 $F\hat{R}M$ retto }



Circonferenza dei nove punti

- Dimostrazione:

- Γ : circonferenza di centro N che ha per diametri DK , EL , FM

- Γ è circoscritta a KLM ✓

- Γ è circoscritta a DEF ✓

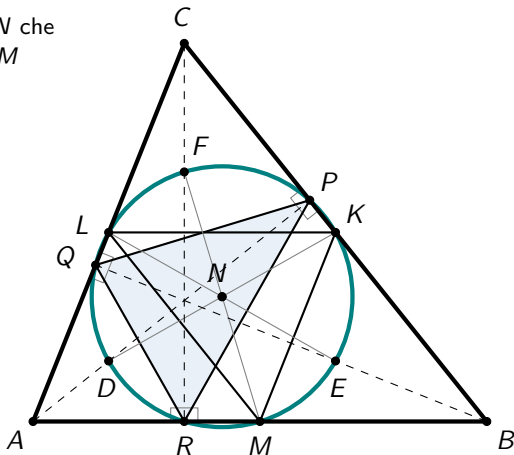
- E il triangolo ortico PQR ?

DK diametro } $\Rightarrow P \in \Gamma$
 $D\hat{P}K$ retto }

EL diametro } $\Rightarrow Q \in \Gamma$
 $E\hat{Q}L$ retto }

FM diametro } $\Rightarrow R \in \Gamma$
 $F\hat{R}M$ retto }

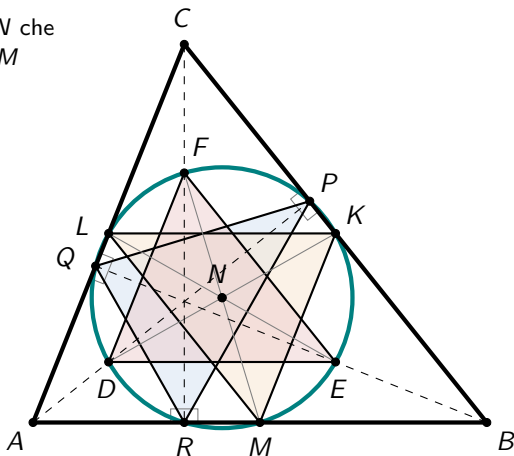
- Γ è circoscritta anche a PQR ✓



Circonferenza dei nove punti

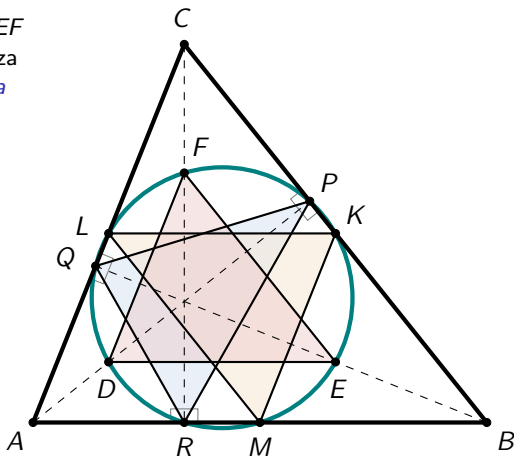
- Dimostrazione:

- Γ : circonferenza di centro N che ha per diametri DK , EL , FM
- Γ è circoscritta a KLM ✓
- Γ è circoscritta a DEF ✓
- Γ è circoscritta a PQR ✓



Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:
 - I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)
- Guardiamo i tre casi:
 - ABC acutangolo

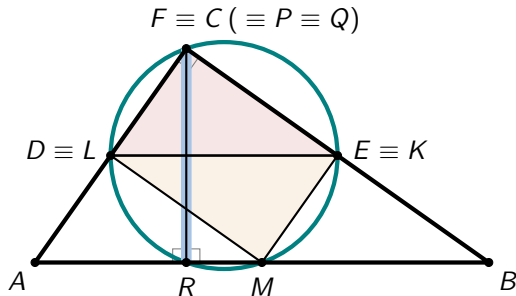


Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:
 - I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)

- Guardiamo i tre casi:

- ABC acutangolo
- ABC rettangolo
 - ortico \rightarrow segmento

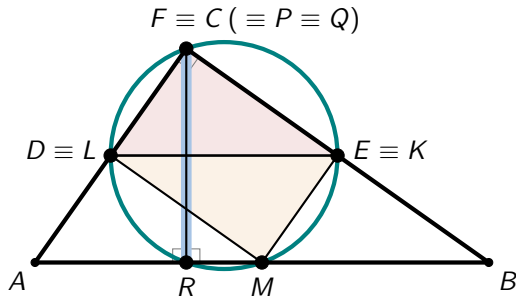


Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:
 - I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)

- Guardiamo i tre casi:

- ABC acutangolo
- ABC rettangolo
 - ortico \rightarrow segmento
 - nove punti \rightarrow cinque



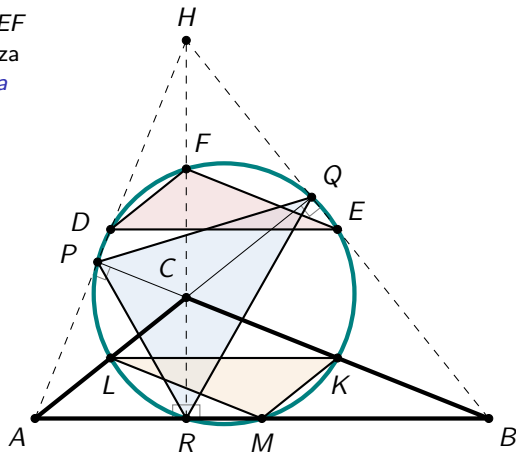
Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:

- I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)

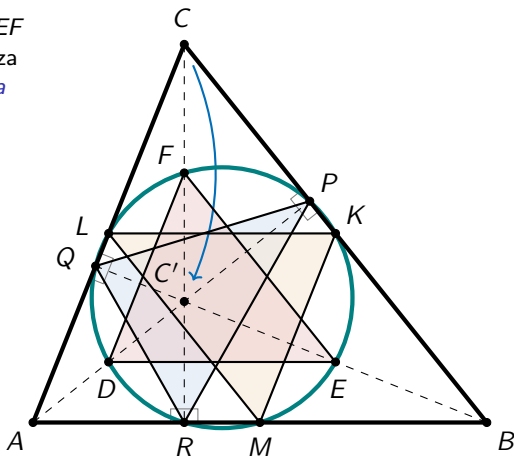
- Guardiamo i tre casi:

- ABC acutangolo
- ABC rettangolo
- ABC ottusangolo



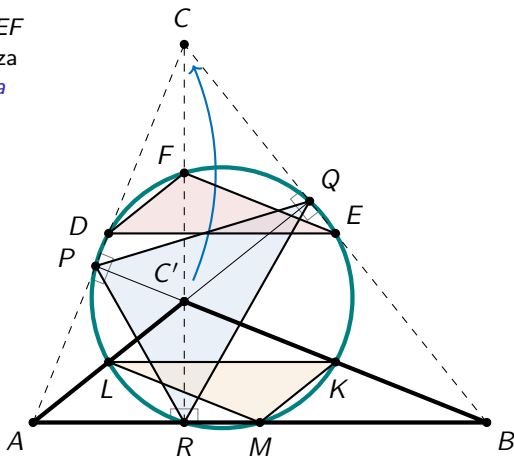
Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:
 - I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)
- Guardiamo i tre casi:
 - ABC acutangolo
 - ABC rettangolo
 - ABC ottusangolo



Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:
 - I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)
- Guardiamo i tre casi:
 - ABC acutangolo
 - ABC rettangolo
 - ABC' ottusangolo



Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 1:

- I triangoli PQR , KLM e DEF hanno la stessa circonferenza circoscritta Γ (*circonferenza dei nove punti* o *di Eulero* o *di Feuerbach*)

- Guardiamo i tre casi:

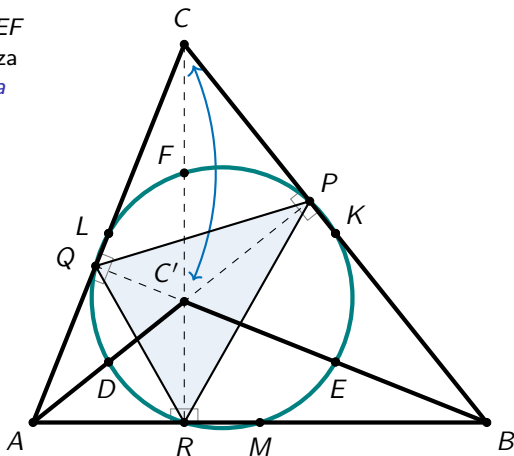
- ABC acutangolo
- ABC rettangolo
- ABC' ottusangolo

- I corrispondenti ortocentrici

$$ABC \xleftrightarrow{h_{AB}} ABC'$$

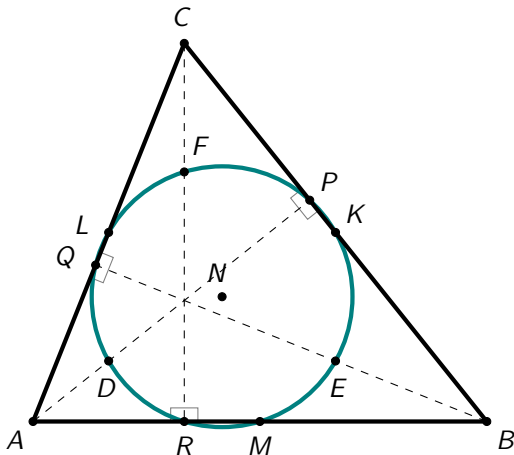
hanno stesso triangolo ortico

e stessa circonferenza dei nove punti



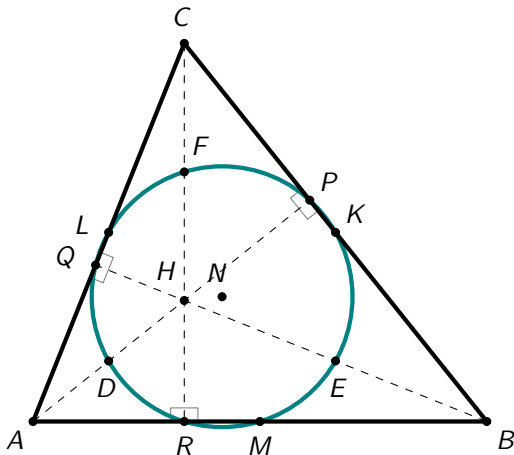
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Centro dei nove punti N* (o *novecentro*): centro della circonferenza dei nove punti



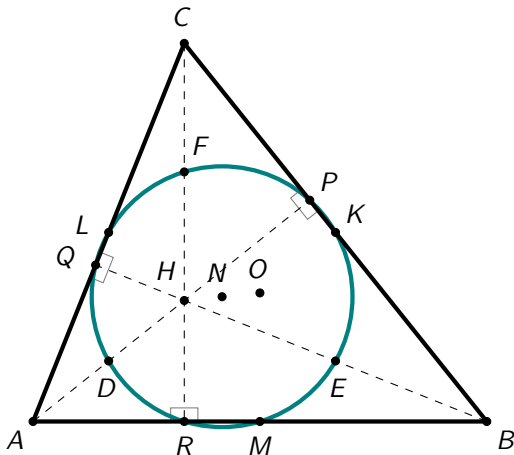
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Centro dei nove punti* N (o *novecentro*): centro della circonferenza dei nove punti
 - Ortocentro: H



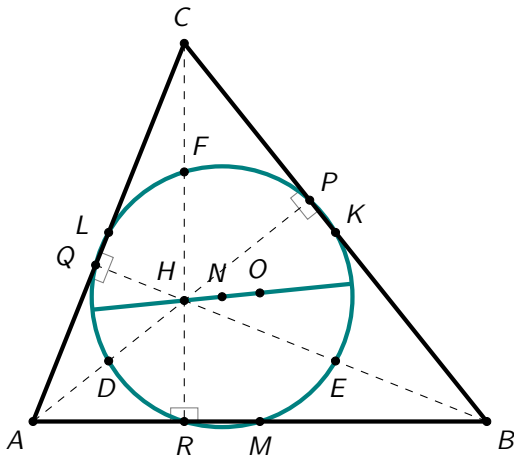
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Centro dei nove punti N* (o *novocentro*): centro della circonferenza dei nove punti
 - Ortocentro: H
 - Circocentro: O



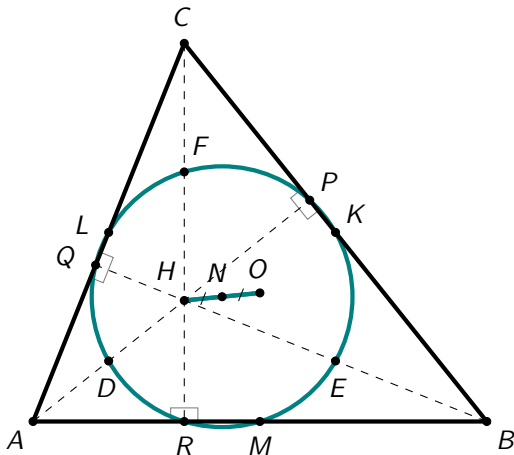
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Centro dei nove punti N* (o *novocentro*): centro della circonferenza dei nove punti
 - Ortocentro: H
 - Circocentro: O
- Proprietà 2:
 - N giace sulla retta di Eulero



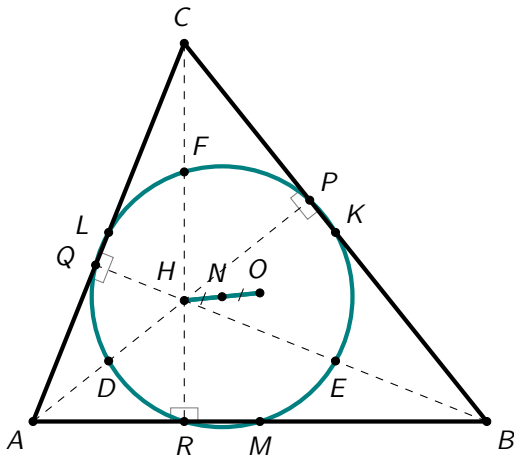
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Centro dei nove punti N* (o *noventro*): centro della circonferenza dei nove punti
 - Ortocentro: H
 - Circocentro: O
- Proprietà 2:
 - N giace sulla retta di Eulero, e in particolare è il punto medio di HO



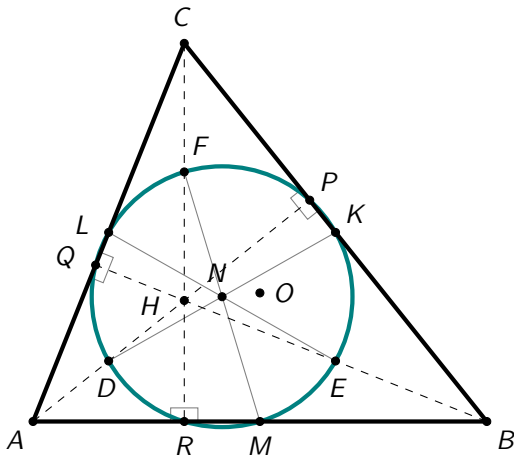
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Centro dei nove punti* N (o *novocentro*): centro della circonferenza dei nove punti
 - Ortocentro: H
 - Circocentro: O
- Proprietà 2:
 - N giace sulla retta di Eulero, e in particolare è il punto medio di HO
- Dimostrazione:



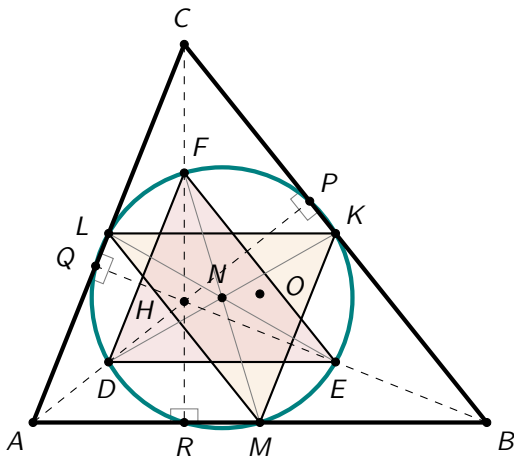
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Centro dei nove punti N* (o *novocentro*): centro della circonferenza dei nove punti
 - Ortocentro: H
 - Circocentro: O
- Proprietà 2:
 - N giace sulla retta di Eulero, e in particolare è il punto medio di HO
- Dimostrazione:
 - Tracciamo nuovamente i diametri di Eulero



Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 2:
 - Il centro N di Γ (*centro dei nove punti*) è il punto medio di HO
- Dimostrazione:
 - I triangoli KLM e DEF



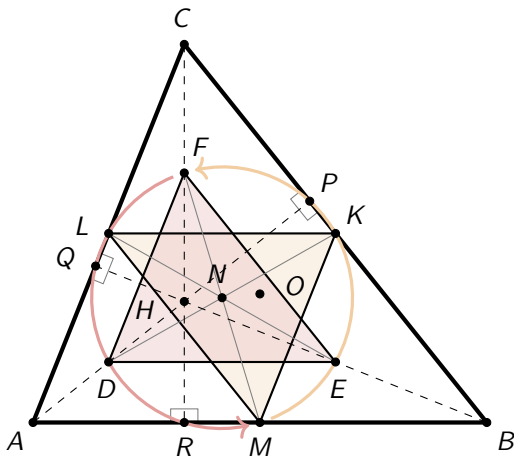
Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 2:

- Il centro N di Γ
(*centro dei nove punti*)
è il punto medio di HO

- Dimostrazione:

- I triangoli KLM e DEF si corrispondono in una simmetria centrale (o rotazione di 180°) attorno al punto N



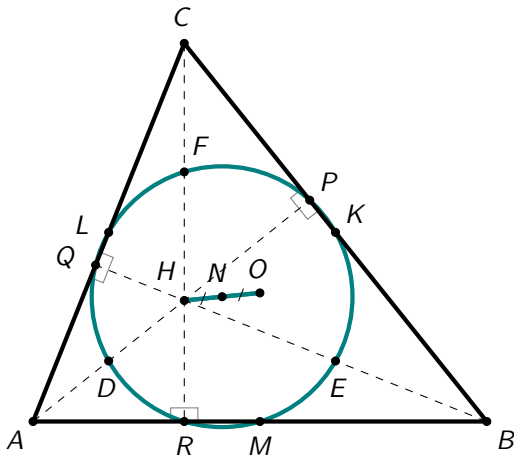
Circonferenza dei nove punti

- Proprietà 2:

- Il centro N di Γ
(*centro dei nove punti*)
è il punto medio di HO

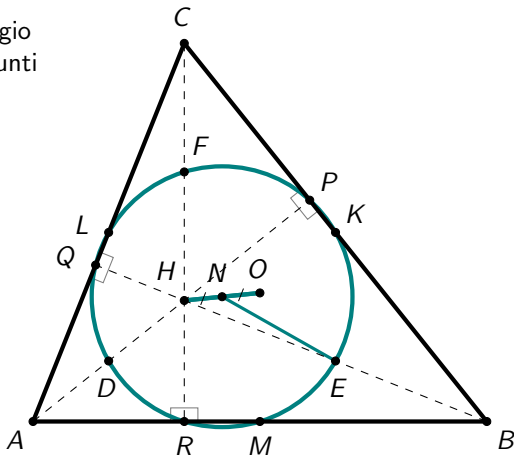
- Dimostrazione:

- I triangoli KLM e DEF si corrispondono in una simmetria centrale (o rotazione di 180°) attorno al punto N
- Tale simmetria deve mandare l'ortocentro di DEF (punto H) nell'ortocentro di KLM (punto O)
 $\Rightarrow N$ punto medio di HO ✓



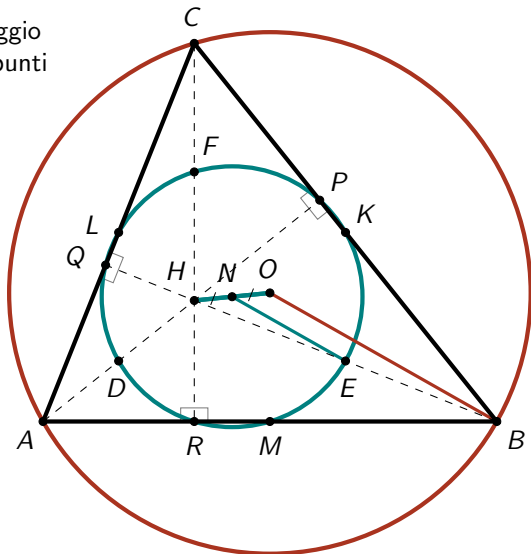
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Raggio dei nove punti* r_9 : raggio della circonferenza dei nove punti



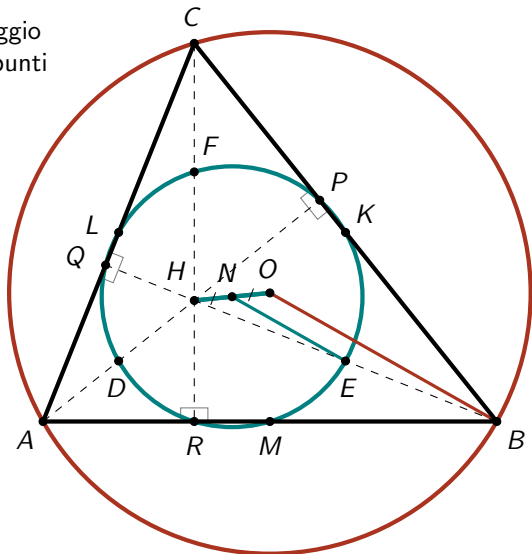
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Raggio dei nove punti* r_9 : raggio della circonferenza dei nove punti
- Proprietà 3:
 - Il raggio dei nove punti è la metà del raggio della circonferenza circoscritta ad ABC



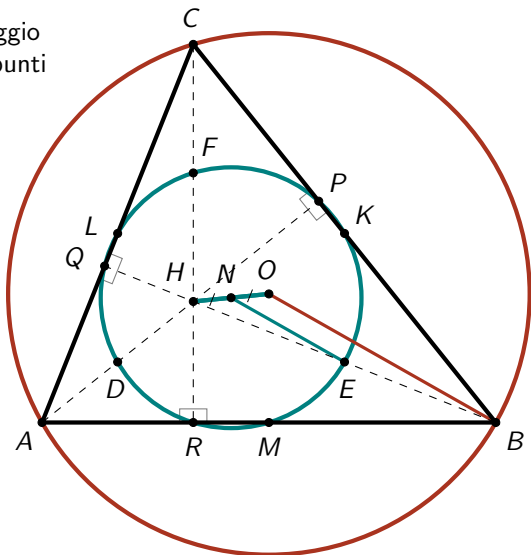
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Raggio dei nove punti* r_9 : raggio della circonferenza dei nove punti
- Proprietà 3:
 - Il raggio dei nove punti è la metà del raggio della circonferenza circoscritta ad ABC
- Dimostrazione:



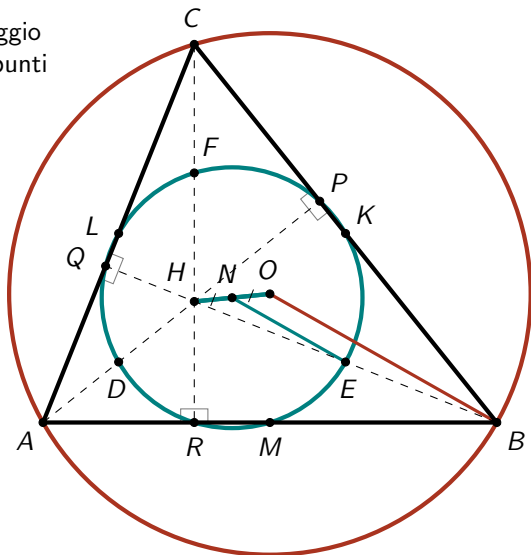
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Raggio dei nove punti* r_9 : raggio della circonferenza dei nove punti
- Proprietà 3:
 - Il raggio dei nove punti è la metà del raggio della circonferenza circoscritta ad ABC
- Dimostrazione:
 - N punto medio di HO



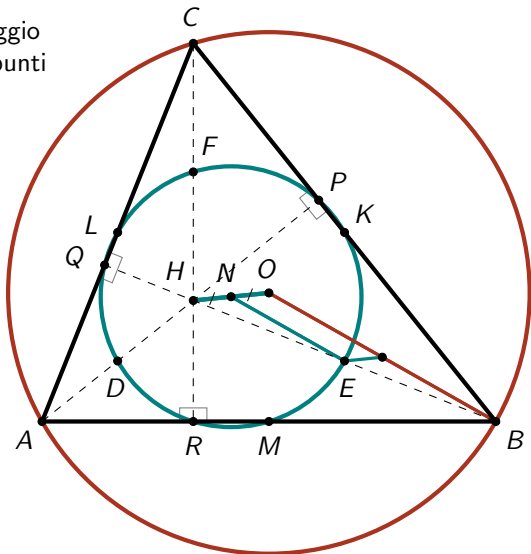
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Raggio dei nove punti* r_9 : raggio della circonferenza dei nove punti
- Proprietà 3:
 - Il raggio dei nove punti è la metà del raggio della circonferenza circoscritta ad ABC
- Dimostrazione:
 - N punto medio di HO
 - E punto medio di HB



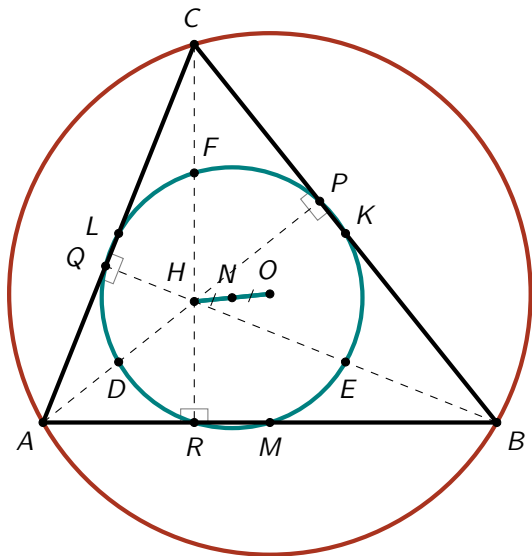
Circonferenza dei nove punti

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Raggio dei nove punti* r_9 : raggio della circonferenza dei nove punti
- Proprietà 3:
 - Il raggio dei nove punti è la metà del raggio della circonferenza circoscritta ad ABC
- Dimostrazione:
 - N punto medio di HO
 - E punto medio di HB
 - $\Rightarrow NE = \frac{1}{2}OB$ ✓



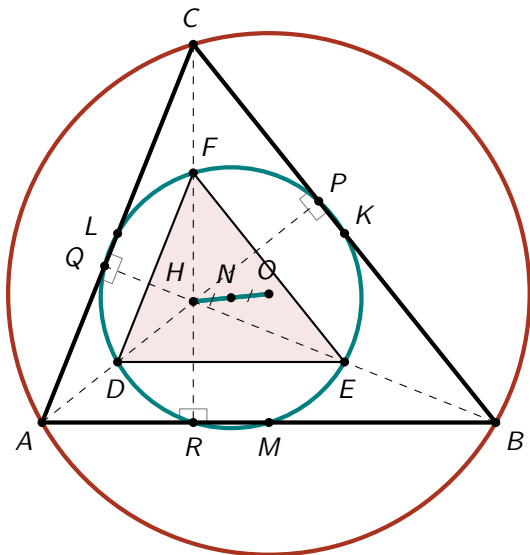
Circonferenza dei nove punti

- Riassumiamo le proprietà:
 - L'omotetia di centro H e rapporto $1/2$ manda ...



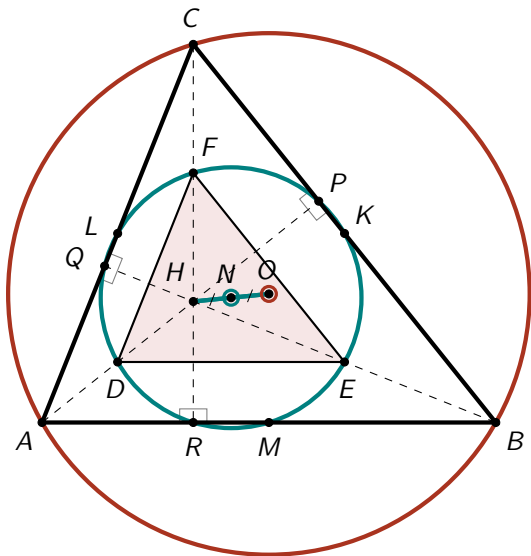
Circonferenza dei nove punti

- Riassumiamo le proprietà:
 - L'omotetia di centro H e rapporto $1/2$ manda ...
 - ... ABC in DEF



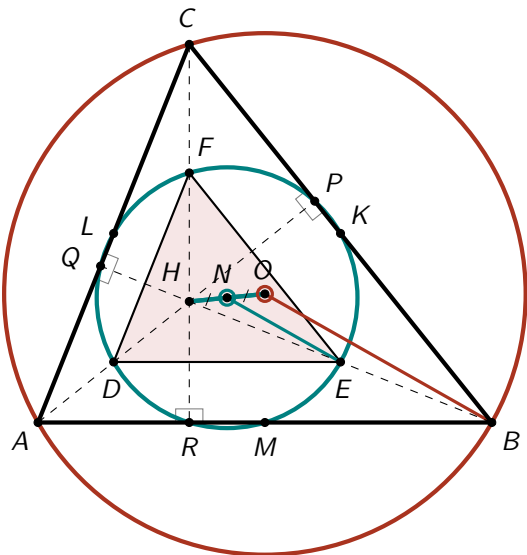
Circonferenza dei nove punti

- Riassumiamo le proprietà:
 - L'omotetia di centro H e rapporto $1/2$ manda ...
 - ... ABC in DEF
 - ... il circocentro O nel centro N dei nove punti



Circonferenza dei nove punti

- Riassumiamo le proprietà:
 - L'omotetia di centro H e rapporto $1/2$ manda ...
 - ... ABC in DEF
 - ... il circocentro O nel centro N dei nove punti
 - ... la circonferenza circoscritta nella circonferenza dei nove punti



Circonferenza dei nove punti

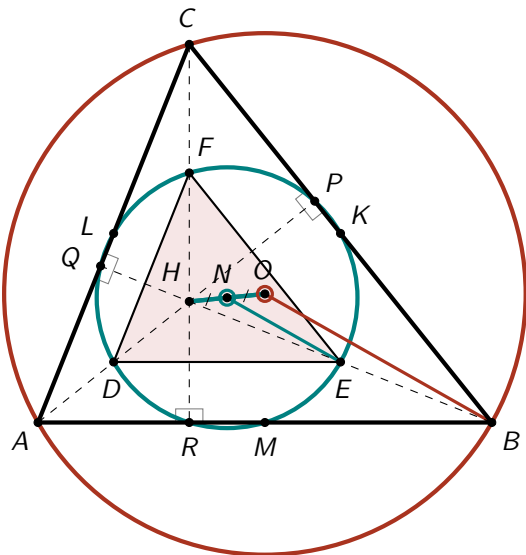
- Riassumiamo le proprietà:

- L'omotetia di centro H e rapporto $1/2$ manda ...

- ... ABC in DEF
- ... il circocentro O nel centro N dei nove punti
- ... la circonferenza circoscritta nella circonferenza dei nove punti

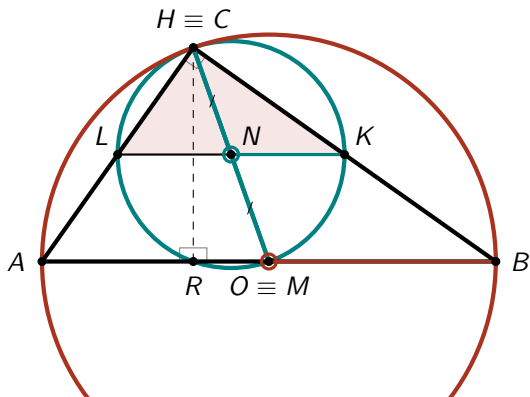
- Guardiamo i tre casi:

- ABC acutangolo



Circonferenza dei nove punti

- Riassumiamo le proprietà:
 - L'omotetia di centro H e rapporto $1/2$ manda ...
 - ... ABC in DEF
 - ... il circocentro O nel centro N dei nove punti
 - ... la circonferenza circoscritta nella circonferenza dei nove punti
- Guardiamo i tre casi:
 - ABC acutangolo
 - ABC rettangolo



Circonferenza dei nove punti

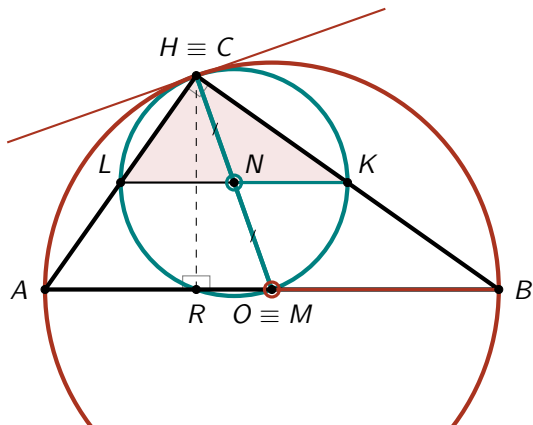
- Riassumiamo le proprietà:

- L'omotetia di centro H e rapporto $1/2$ manda ...

- ... ABC in DEF
- ... il circocentro O nel centro N dei nove punti
- ... la circonferenza circoscritta nella circonferenza dei nove punti

- Guardiamo i tre casi:

- ABC acutangolo
- ABC rettangolo
 - Le due circonferenze sono tangenti in H



Circonferenza dei nove punti

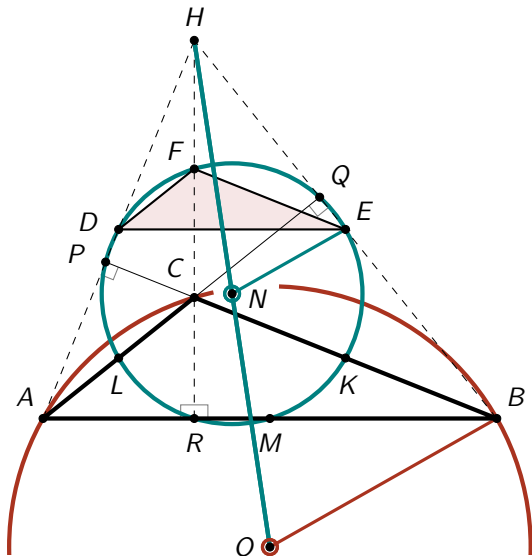
- Riassumiamo le proprietà:

- L'omotetia di centro H e rapporto $1/2$ manda ...

- ... ABC in DEF
- ... il circocentro O nel centro N dei nove punti
- ... la circonferenza circoscritta nella circonferenza dei nove punti

- Guardiamo i tre casi:

- ABC acutangolo
- ABC rettangolo
- ABC ottusangolo



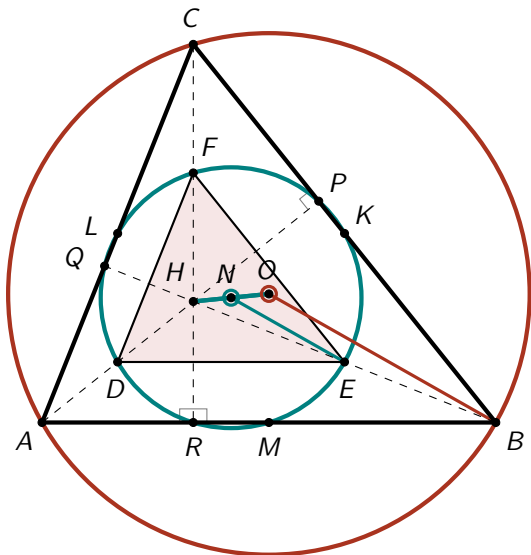
Circonferenza dei nove punti

- Riassumiamo le proprietà:

- L'omotetia di centro H e rapporto $1/2$ manda ...
 - ... ABC in DEF
 - ... il circocentro O nel centro N dei nove punti
 - ... la circonferenza circoscritta nella circonferenza dei nove punti

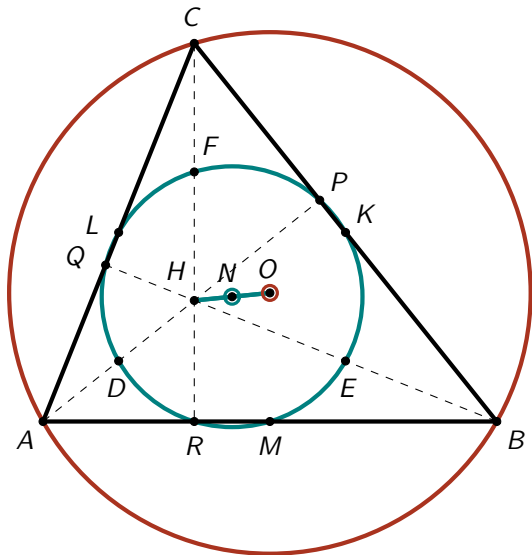
- Guardiamo i tre casi:

- ABC acutangolo
- ABC rettangolo
- ABC ottusangolo



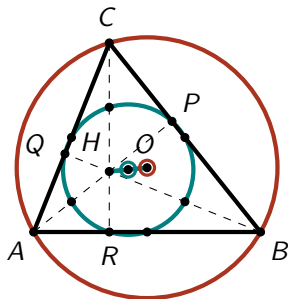
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)



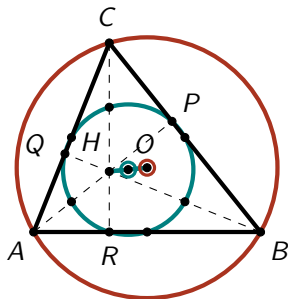
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)



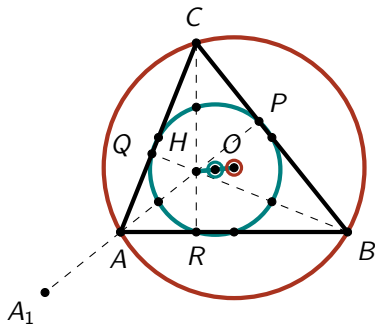
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2



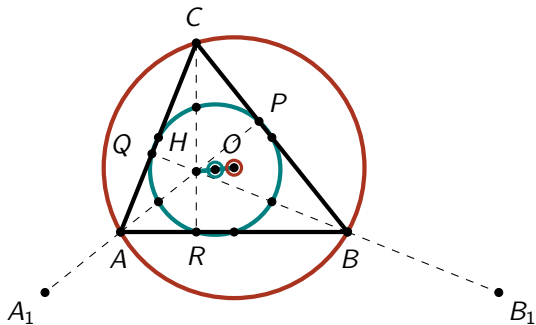
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2



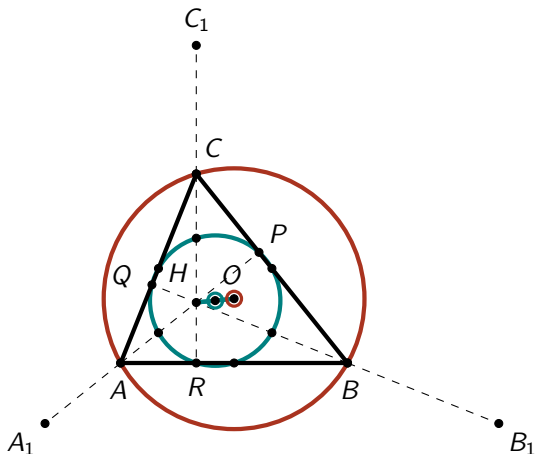
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2



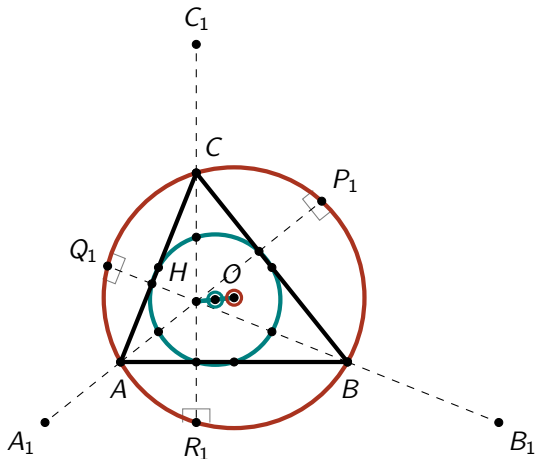
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2



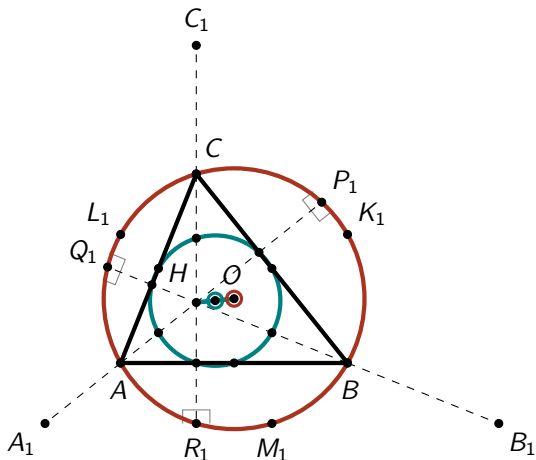
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2



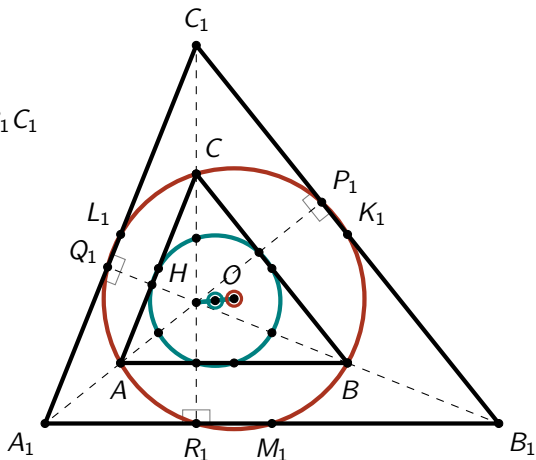
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2



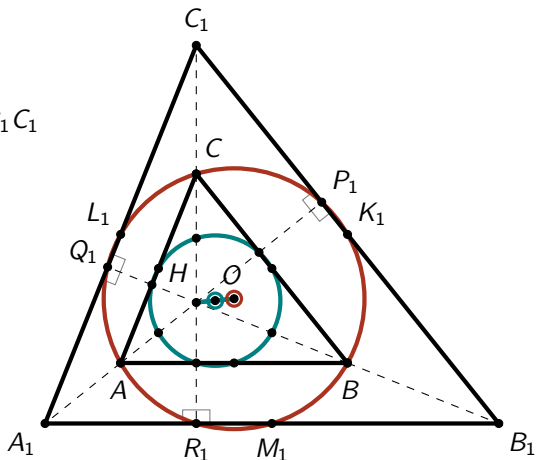
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2
- *Supertriangolo* di ABC : $A_1B_1C_1$



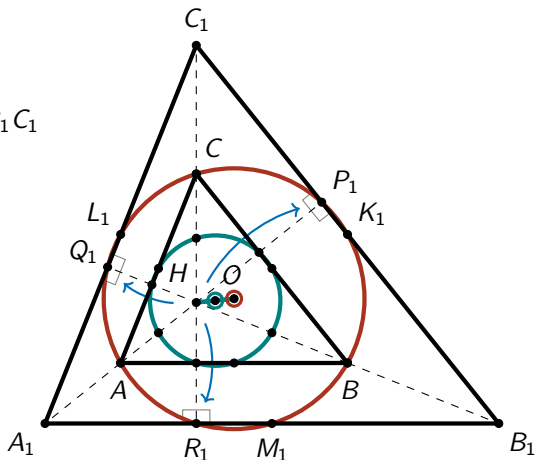
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2
- *Supertriangolo* di ABC : $A_1B_1C_1$
- Proprietà:
 - La circonferenza circoscritta ad ABC è la circonferenza dei nove punti di $A_1B_1C_1$



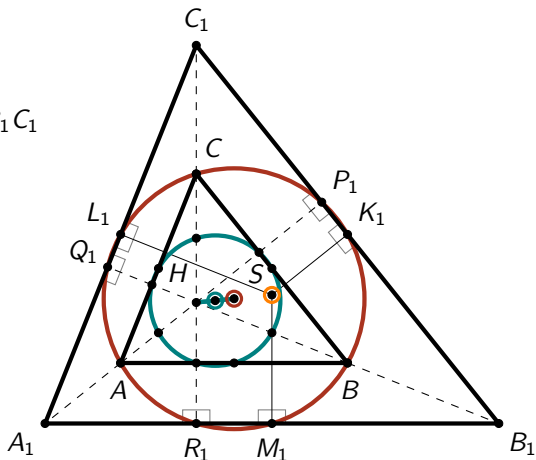
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2
- *Supertriangolo* di ABC : $A_1B_1C_1$
- Proprietà:
 - La circonferenza circoscritta ad ABC è la circonferenza dei nove punti di $A_1B_1C_1$
 - I simmetrici di H rispetto ai piedi P, Q, R delle altezze giacciono sulla circonferenza circoscritta ad ABC



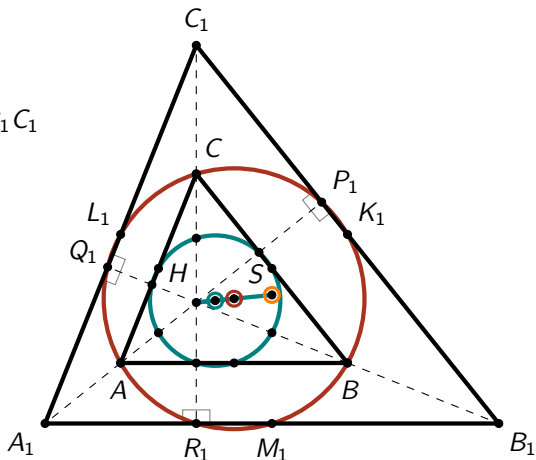
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2
- *Supertriangolo* di ABC : $A_1B_1C_1$
- *Supercentro* di ABC :
circocentro S di $A_1B_1C_1$



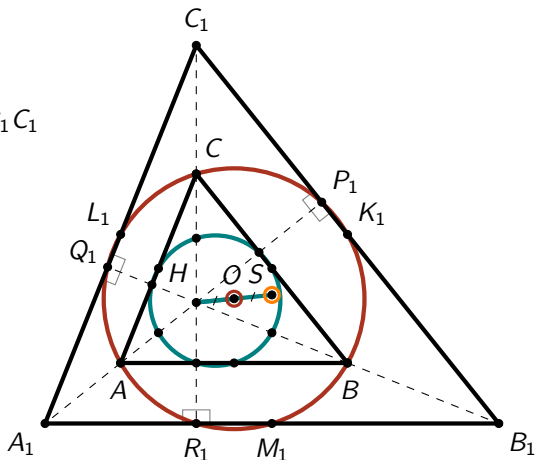
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2
- *Supertriangolo* di ABC : $A_1B_1C_1$
- *Supercentro* di ABC :
circocentro S di $A_1B_1C_1$
- Proprietà:
 - S giace sulla retta di Eulero



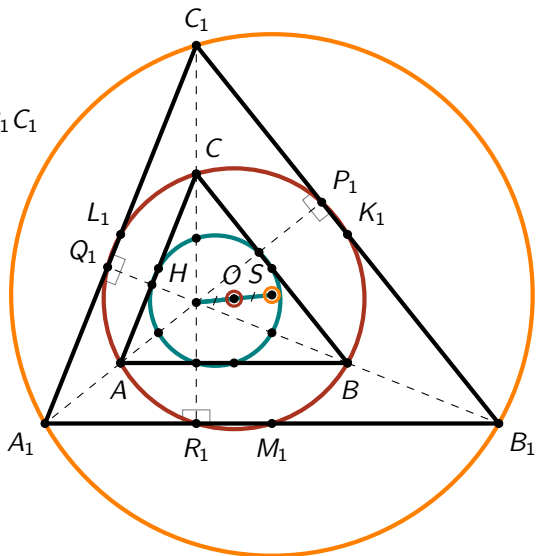
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2
- *Supertriangolo* di ABC : $A_1B_1C_1$
- *Supercentro* di ABC :
circocentro S di $A_1B_1C_1$
- Proprietà:
 - S giace sulla retta di Eulero
 - $HO = OS$



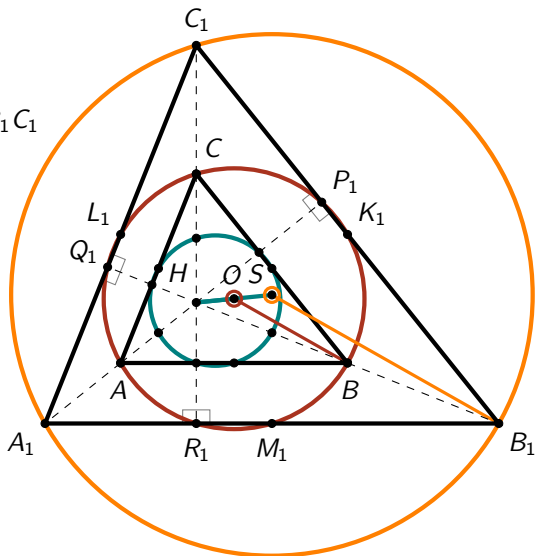
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2
- *Supertriangolo* di ABC : $A_1B_1C_1$
- *Supercentro* di ABC :
circocentro S di $A_1B_1C_1$
- *Supercirconferenza*
di ABC : circonferenza
circoscritta ad $A_1B_1C_1$



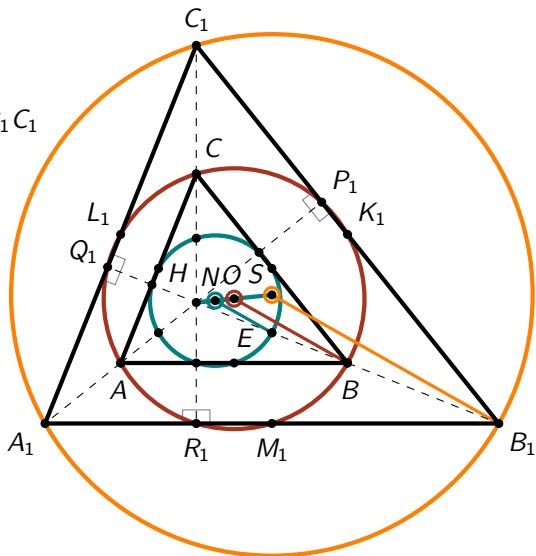
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2
- *Supertriangolo* di ABC : $A_1B_1C_1$
- *Supercentro* di ABC :
circocentro S di $A_1B_1C_1$
- *Supercirconferenza* di ABC : circonferenza circoscritta ad $A_1B_1C_1$
- Proprietà:
 - $SB_1 = 2OB$



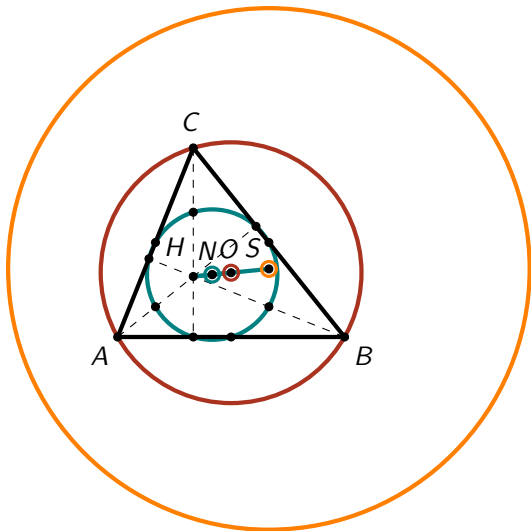
Supertriangolo, supercentro e supercirconferenza

- ABC triangolo (qualsiasi)
 - Consideriamo l'omotetia di centro H e rapporto 2
- *Supertriangolo* di ABC : $A_1B_1C_1$
- *Supercentro* di ABC :
circocentro S di $A_1B_1C_1$
- *Supercirconferenza* di ABC : circonferenza circoscritta ad $A_1B_1C_1$
- Proprietà:
 - $SB_1 = 2OB = 4NE$



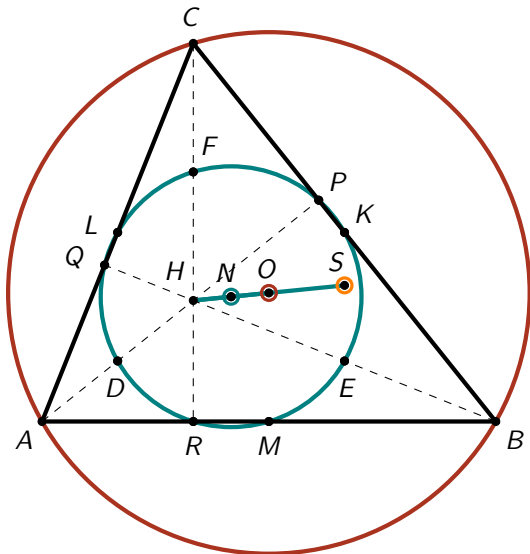
Punti notevoli 2D (Sintesi)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Sulla retta di Eulero:
 - Ortocentro: H
 - Novecentro: N
 - Circocentro: O
 - Supercentro: S



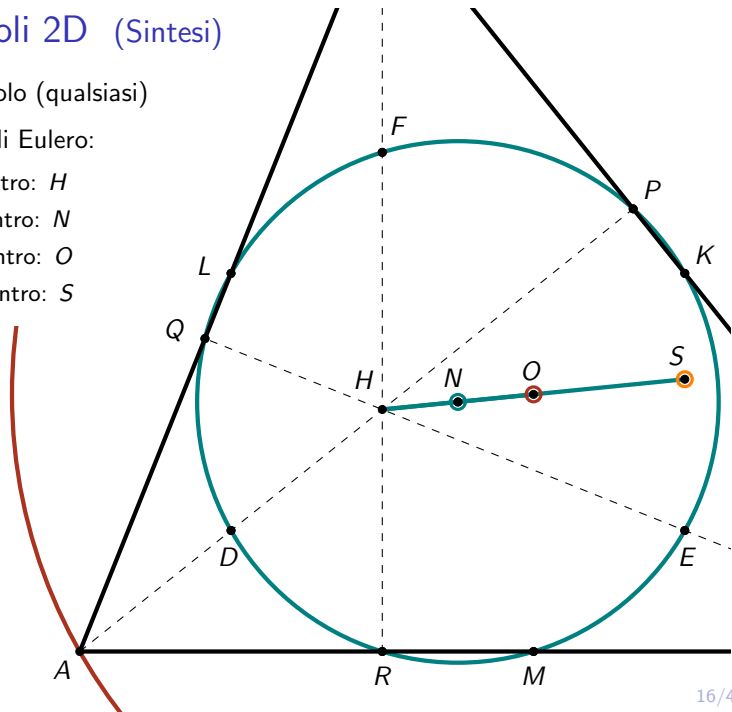
Punti notevoli 2D (Sintesi)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Sulla retta di Eulero:
 - Ortocentro: H
 - Novecentro: N
 - Circocentro: O
 - Supercentro: S



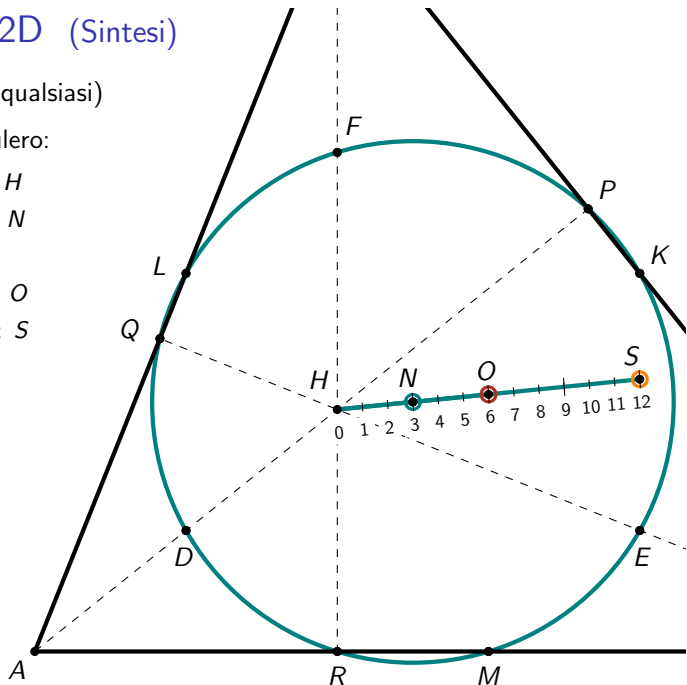
Punti notevoli 2D (Sintesi)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Sulla retta di Eulero:
 - Ortocentro: H
 - Novecentro: N
 - Circocentro: O
 - Supercentro: S



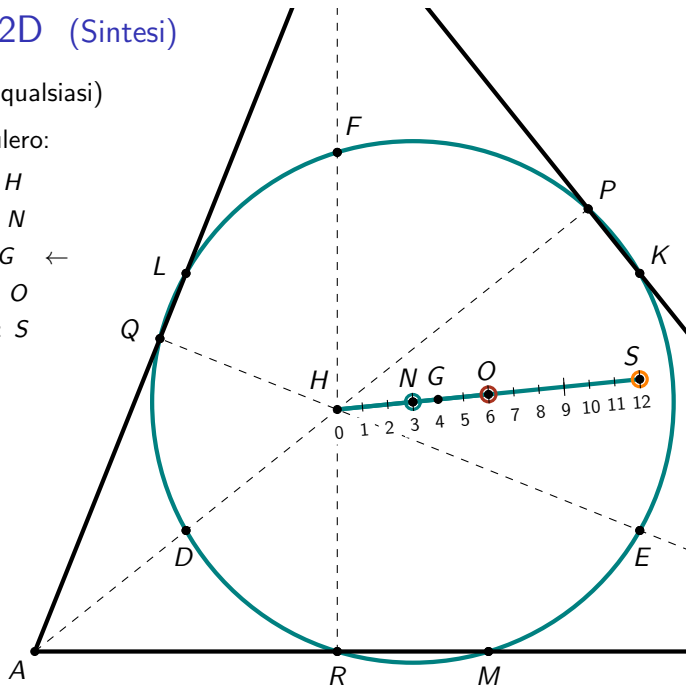
Punti notevoli 2D (Sintesi)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Sulla retta di Eulero:
 - Ortocentro: H
 - Novecentro: N
 - Circocentro: O
 - Supercentro: S



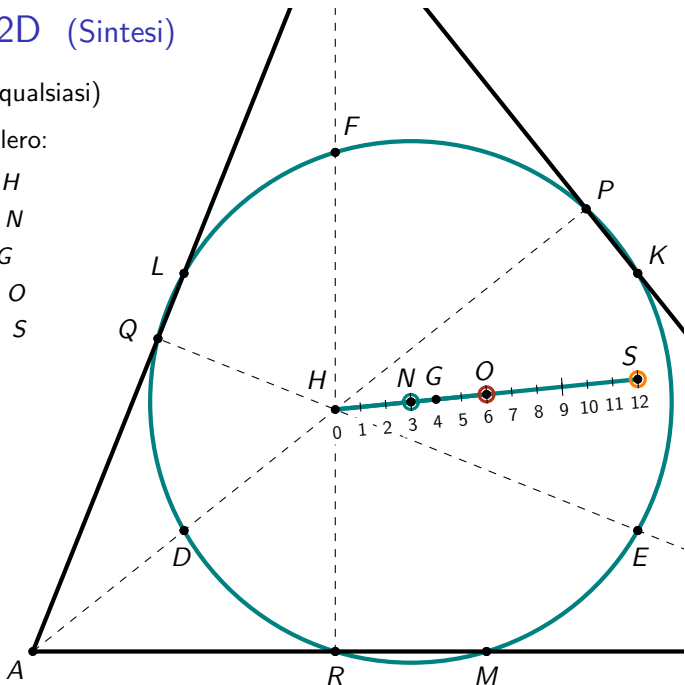
Punti notevoli 2D (Sintesi)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Sulla retta di Eulero:
 - Ortocentro: H
 - Novecentro: N
 - Baricentro: G ←
 - Circocentro: O
 - Supercentro: S



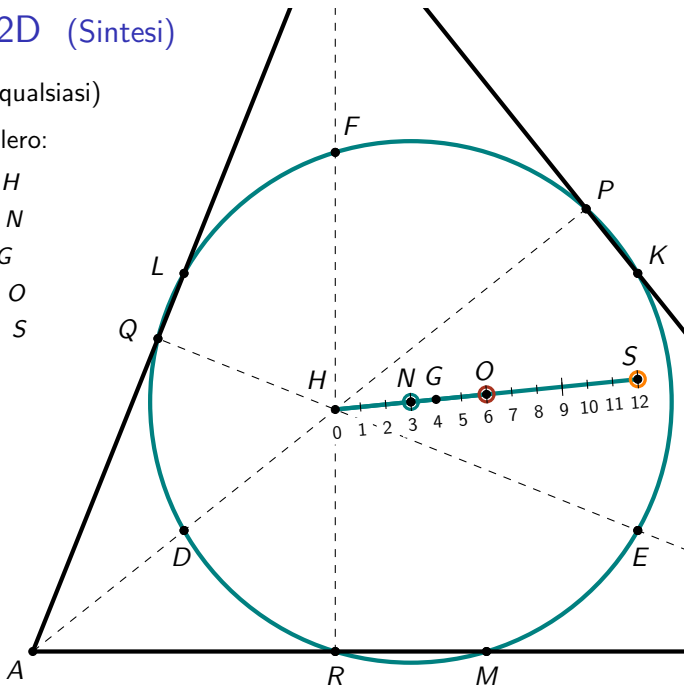
Punti notevoli 2D (Sintesi)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Sulla retta di Eulero:
 - Ortocentro: H
 - Novecentro: N
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
 - Supercentro: S
- Proprietà:
 - $HN = \frac{1}{4}HS$



Punti notevoli 2D (Sintesi)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Sulla retta di Eulero:
 - Ortocentro: H
 - Novecentro: N
 - Baricentro: G
 - Circocentro: O
 - Supercentro: S
- Proprietà:
 - $HN = \frac{1}{4}HS$
 - $HG = \frac{1}{3}HS$



Punti notevoli 2D (Sintesi)

- ABC triangolo (qualsiasi)

- Sulla retta di Eulero:

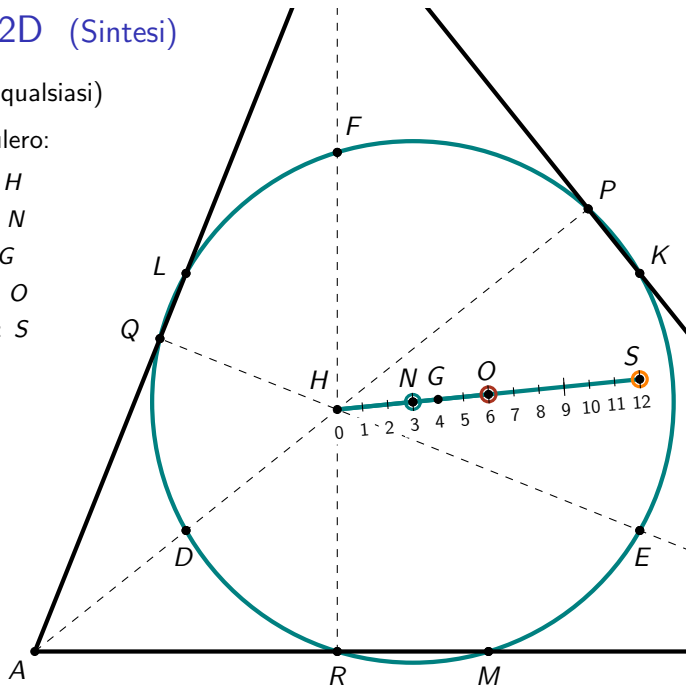
- Ortocentro: H
- Novecentro: N
- Baricentro: G
- Circocentro: O
- Supercentro: S

- Proprietà:

- $HN = \frac{1}{4}HS$

- $HG = \frac{1}{3}HS$

- $HO = \frac{1}{2}HS$



Punti notevoli 2D (Sintesi)

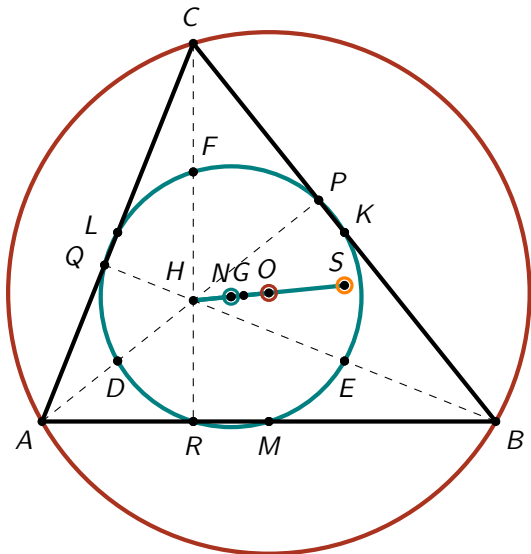
- ABC triangolo (qualsiasi)

- Sulla retta di Eulero:

- Ortocentro: H
- Novecentro: N
- Baricentro: G
- Circoentro: O
- Supercentro: S

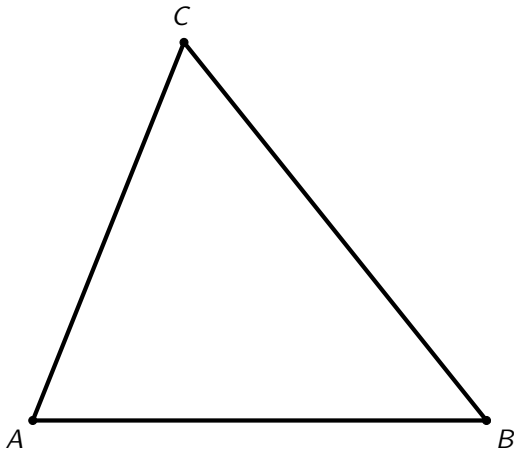
- Proprietà:

- $HN = \frac{1}{4}HS$
- $HG = \frac{1}{3}HS$
- $HO = \frac{1}{2}HS$



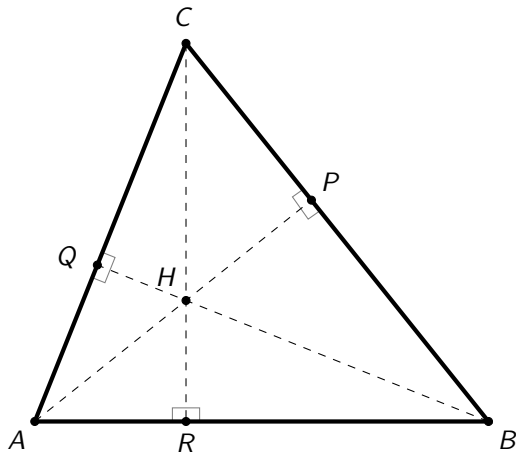
Il mondo oltre Flatlandia

- ABC triangolo acutangolo



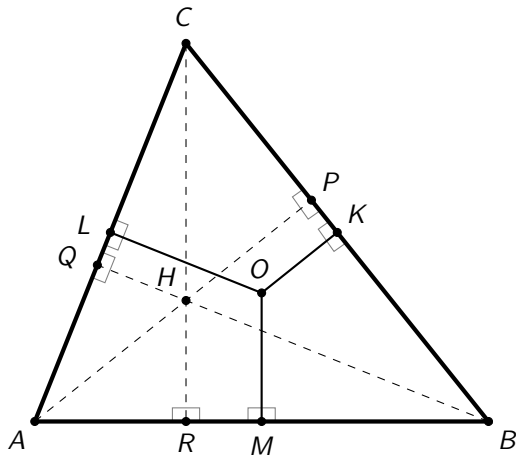
Il mondo oltre Flatlandia

- ABC triangolo acutangolo
- Tracciamo nuovamente
 - Le altezze e l'ortocentro



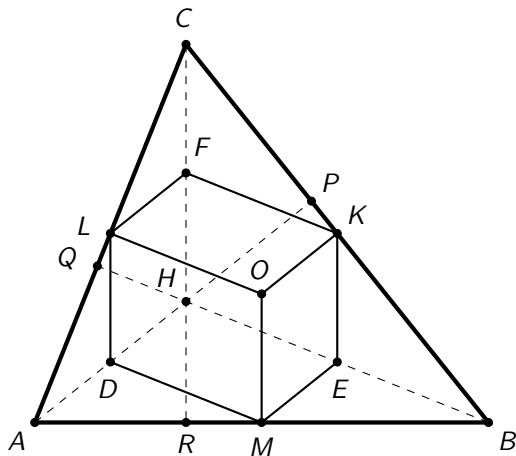
Il mondo oltre Flatlandia

- ABC triangolo acutangolo
- Tracciamo nuovamente
 - Le altezze e l'ortocentro
 - Gli assi e il circocentro



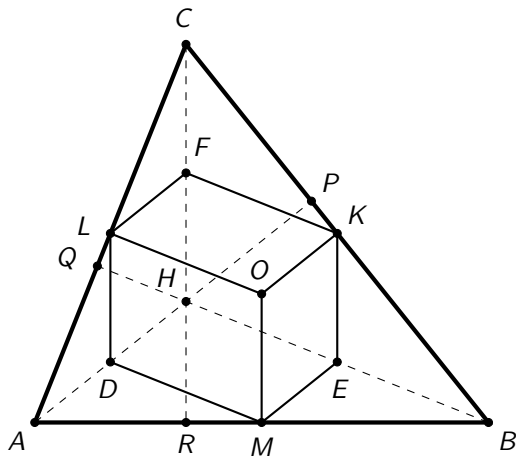
Il mondo oltre Flatlandia

- ABC triangolo acutangolo
- Tracciamo nuovamente
 - Le altezze e l'ortocentro
 - Gli assi e il circocentro
 - L'esagono di Eulero



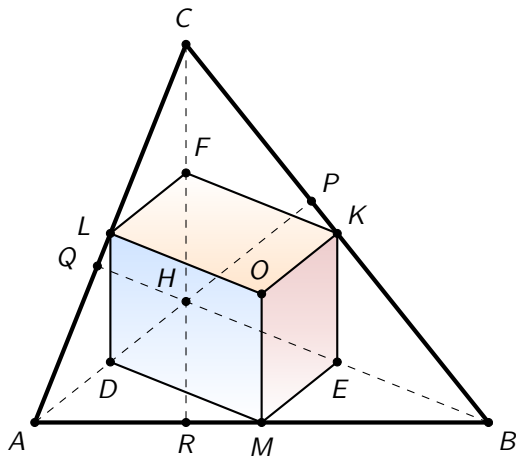
Il mondo oltre Flatlandia

- ABC triangolo acutangolo
- Tracciamo nuovamente
 - Le altezze e l'ortocentro
 - Gli assi e il circocentro
 - L'esagono di Eulero
- Diamo un po' di tinta



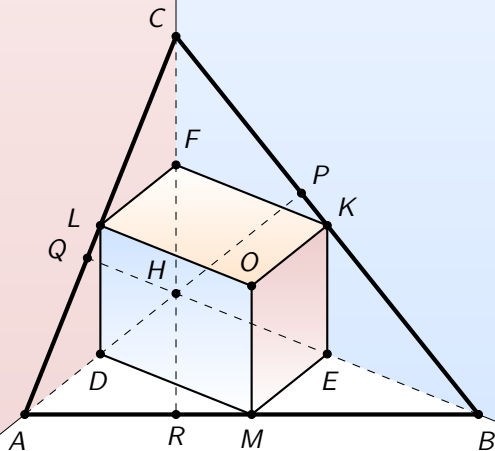
Il mondo oltre Flatlandia

- ABC triangolo acutangolo
- Tracciamo nuovamente
 - Le altezze e l'ortocentro
 - Gli assi e il circocentro
 - L'esagono di Eulero
- Diamo un po' di tinta
 - all'esagono



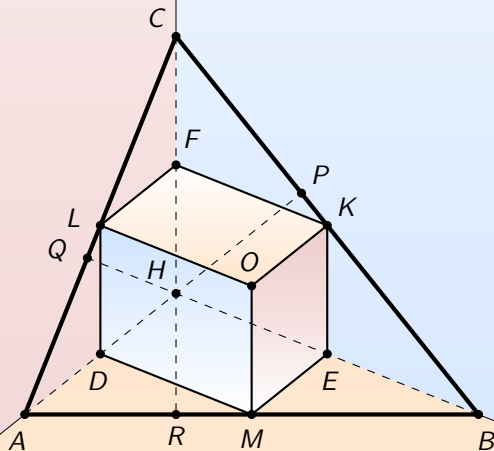
Il mondo oltre Flatlandia

- ABC triangolo acutangolo
- Tracciamo nuovamente
 - Le altezze e l'ortocentro
 - Gli assi e il circocentro
 - L'esagono di Eulero
- Diamo un po' di tinta
 - all'esagono
 - alle "pareti"



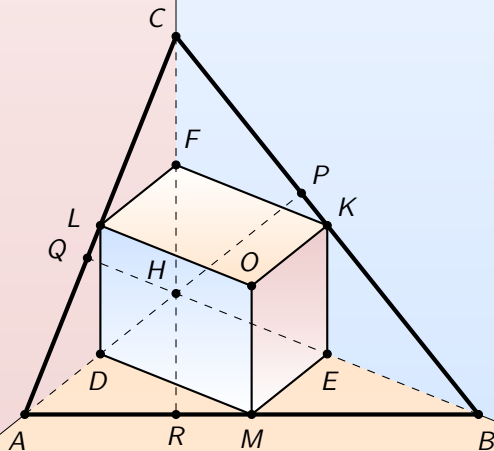
Il mondo oltre Flatlandia

- ABC triangolo acutangolo
- Tracciamo nuovamente
 - Le altezze e l'ortocentro
 - Gli assi e il circocentro
 - L'esagono di Eulero
- Diamo un po' di tinta
 - all'esagono
 - alle "pareti"
 - e al "pavimento"



Il mondo oltre Flatlandia

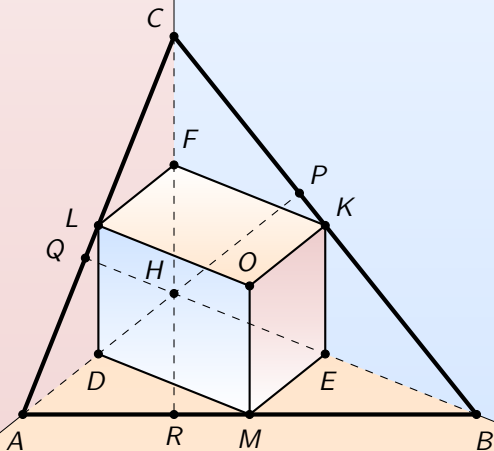
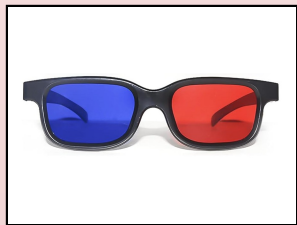
- ABC triangolo acutangolo
- Tracciamo nuovamente
 - Le altezze e l'ortocentro
 - Gli assi e il circocentro
 - L'esagono di Eulero
- Diamo un po' di tinta
 - all'esagono
 - alle "pareti"
 - e al "pavimento"



- Siamo finiti in una stanza 3D!

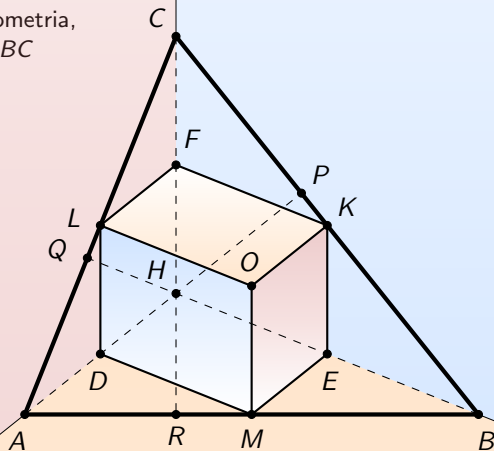
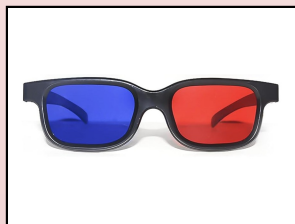
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D



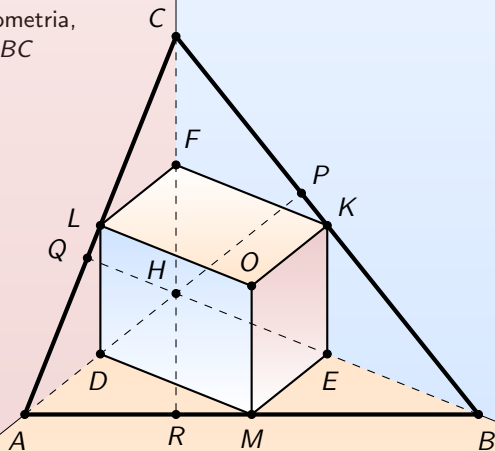
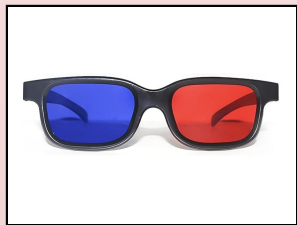
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Pensiamo la figura in assonometria, con il piano π contenente ABC come piano assonometrico



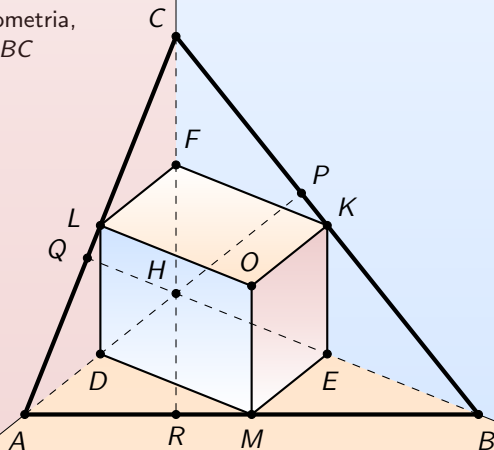
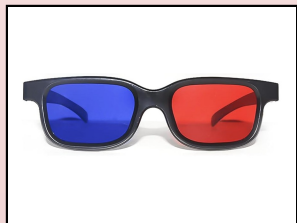
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Pensiamo la figura in assonometria, con il piano π contenente ABC come piano assonometrico
 - L'ortocentro H (o meglio il suo corrispondente 3D) è l'origine dello spazio



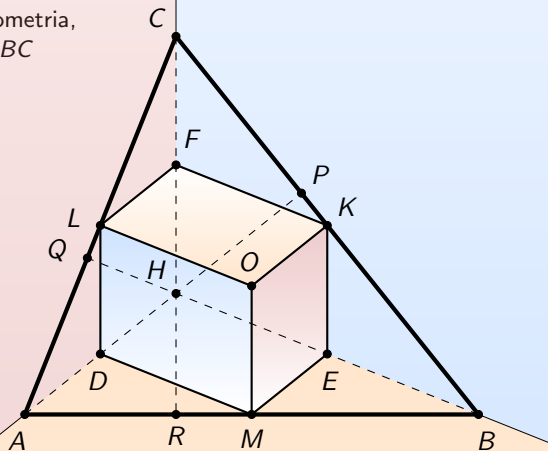
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Pensiamo la figura in assonometria, con il piano π contenente ABC come piano assonometrico
 - L'ortocentro H (o meglio il suo corrispondente 3D) è l'origine dello spazio
 - Le altezze HA , HB e HC danno la direzione dei tre assi cartesiani



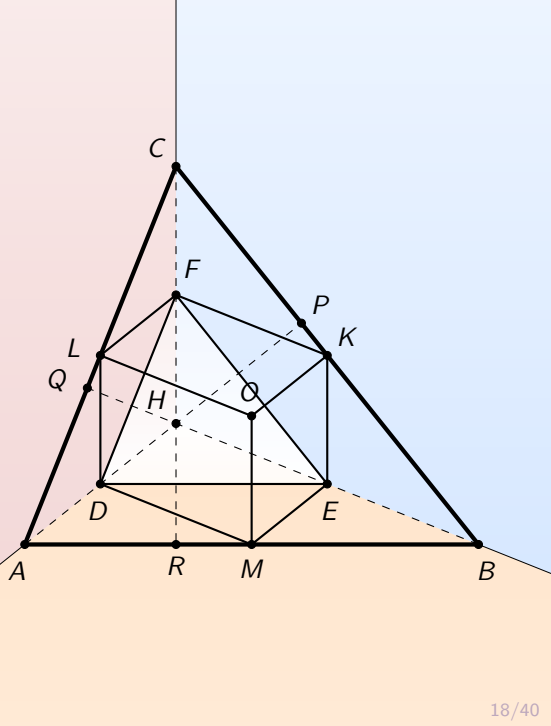
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Pensiamo la figura in assonometria, con il piano π contenente ABC come piano assonometrico
 - L'ortocentro H (o meglio il suo corrispondente 3D) è l'origine dello spazio
 - Le altezze HA , HB e HC danno la direzione dei tre assi cartesiani
 - L'esagono di Eulero delimita un parallelepipedo "appoggiato alle pareti" (*scatola di Eulero*)



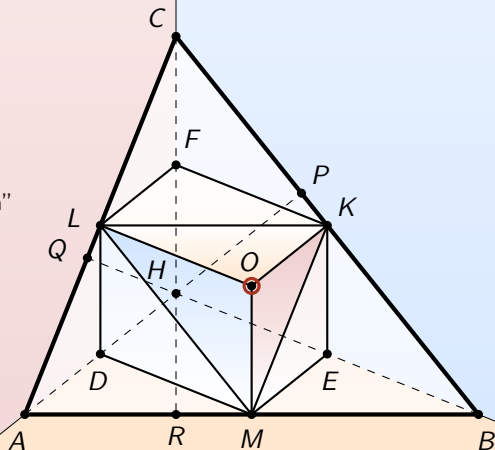
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Il (corrispondente 3D del) triangolo di Eulero DEF ha i vertici sugli assi cartesiani e "taglia" la scatola di Eulero



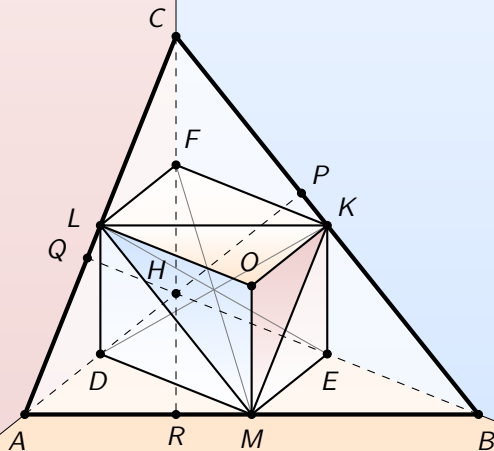
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Il (corrispondente 3D del) triangolo di Eulero DEF ha i vertici sugli assi cartesiani e “taglia” la scatola di Eulero
 - Il triangolo ABC ha i vertici sugli assi cartesiani e “taglia” la scatola di Eulero nel triangolo mediale KLM
 - Il circocentro O (o meglio il suo corrispondente 3D) è il vertice della scatola di Eulero più vicino all'osservatore



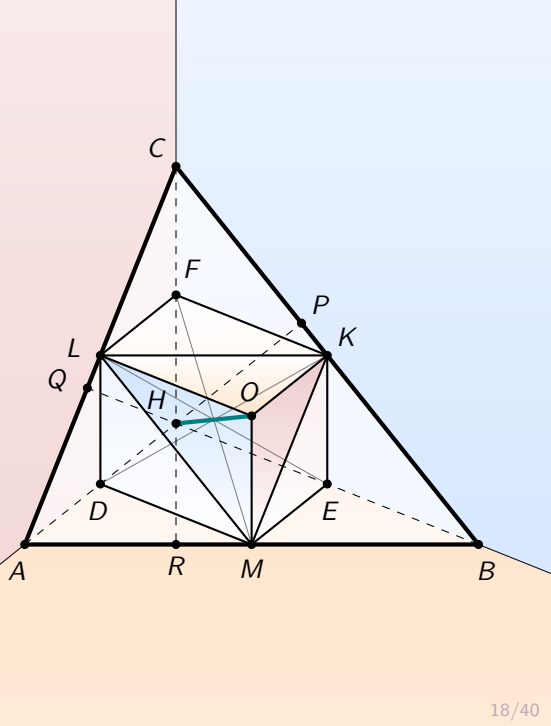
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Le diagonali di Eulero sono tre delle quattro diagonali della scatola di Eulero



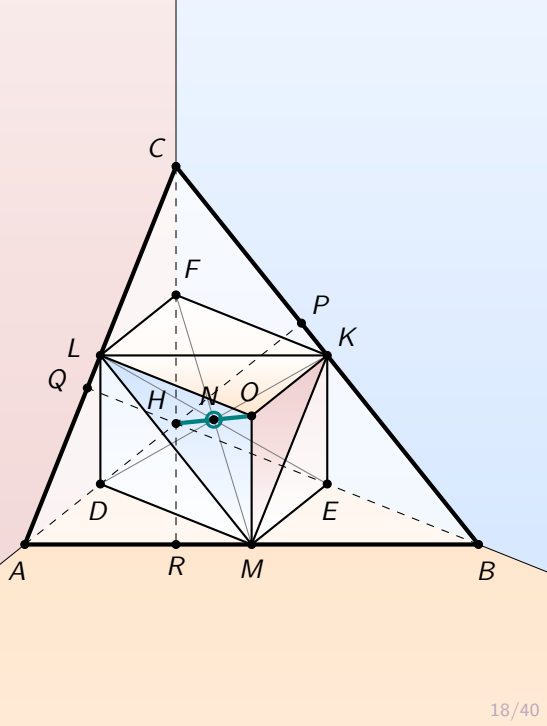
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Le diagonali di Eulero sono tre delle quattro diagonali della scatola di Eulero
 - Il (corrispondente 3D del) segmento HO è la quarta diagonale della scatola



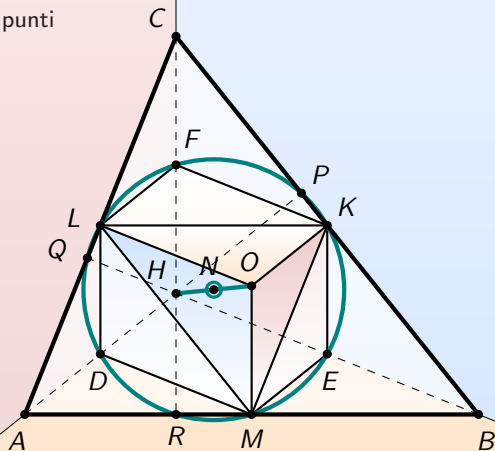
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Le diagonali di Eulero sono tre delle quattro diagonali della scatola di Eulero
 - Il (corrispondente 3D del) segmento HO è la quarta diagonale della scatola
 - Il (corrispondente 3D del) novecentro N è il centro della scatola di Eulero



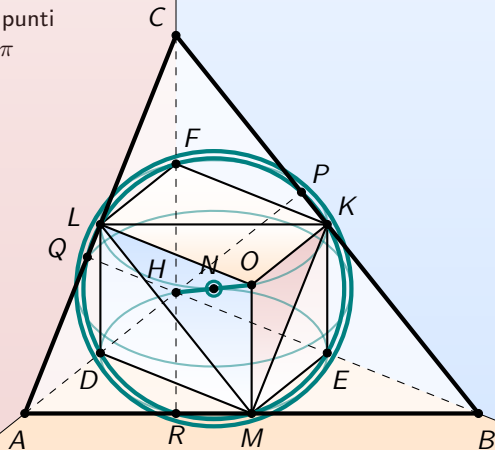
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - La circonferenza Γ dei nove punti



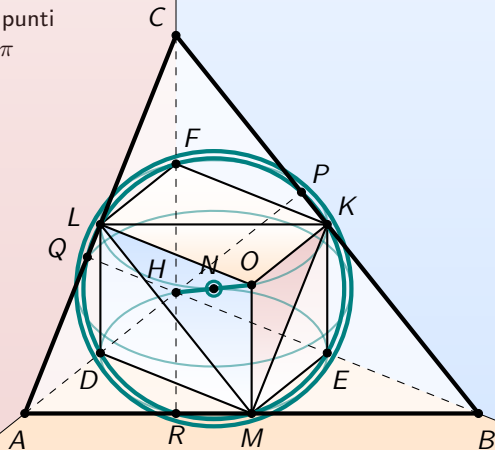
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - La circonferenza Γ dei nove punti è l'intersezione con il piano π della sfera circoscritta alla scatola di Eulero (*sfera di Eulero*)



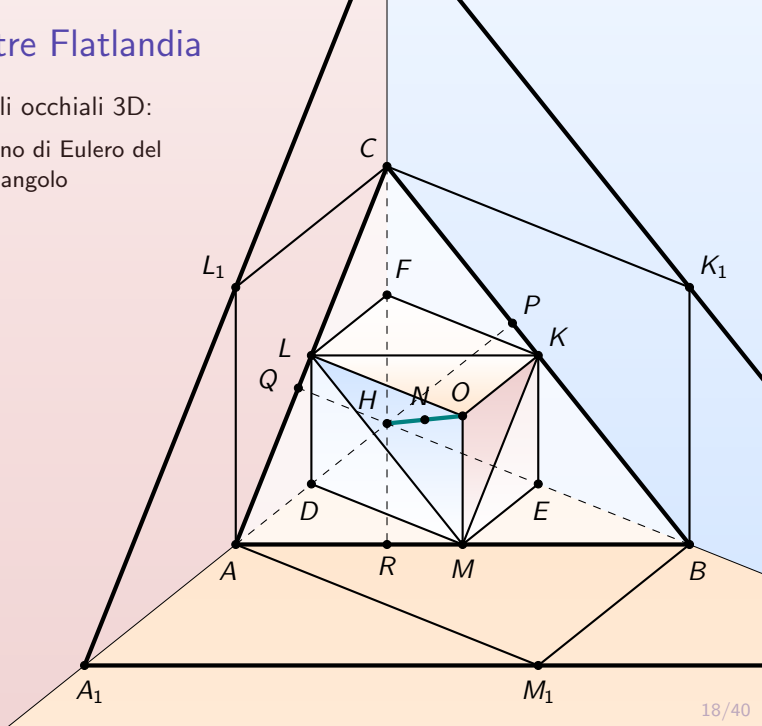
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - La circonferenza Γ dei nove punti è l'intersezione con il piano π della sfera circoscritta alla scatola di Eulero (*sfera di Eulero*)
 - La sfera di Eulero passa anche per i corrispondenti 3D dell'ortocentro H e del circocentro O , che sono vertici di un suo diametro (*sfera degli undici punti*)



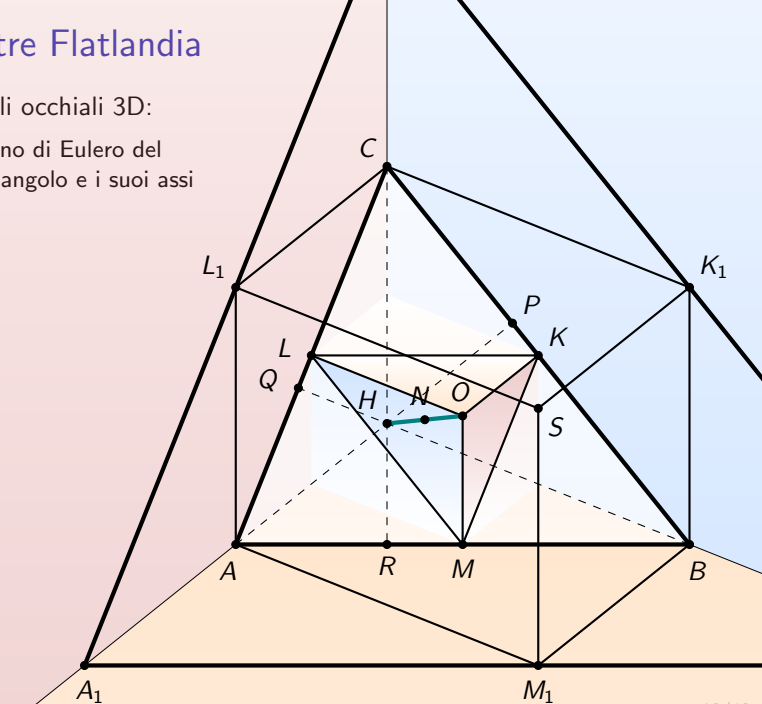
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - L'esagono di Eulero del supertriangolo



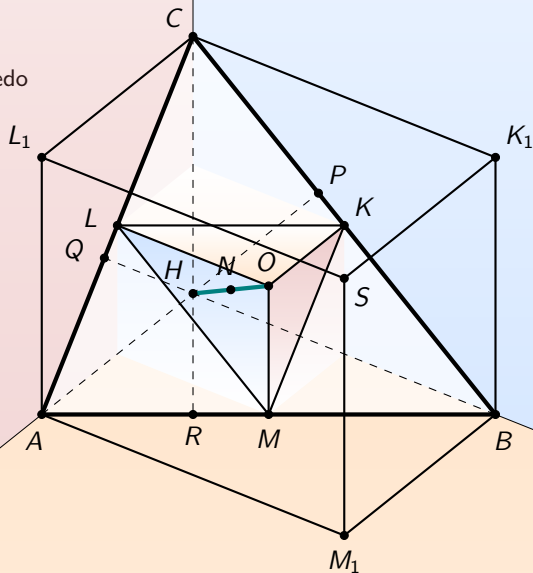
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - L'esagono di Eulero del supertriangolo e i suoi assi



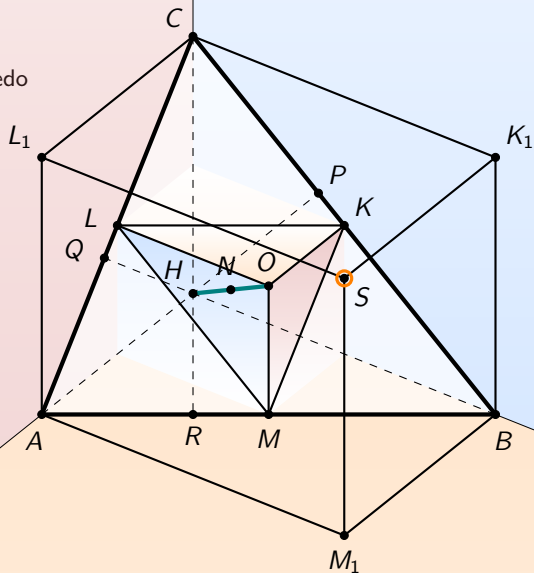
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - L'esagono di Eulero del supertriangolo e i suoi assi delimitano un parallelepipedo con i lati doppi rispetto alla scatola di Eulero (*circoscatola*)



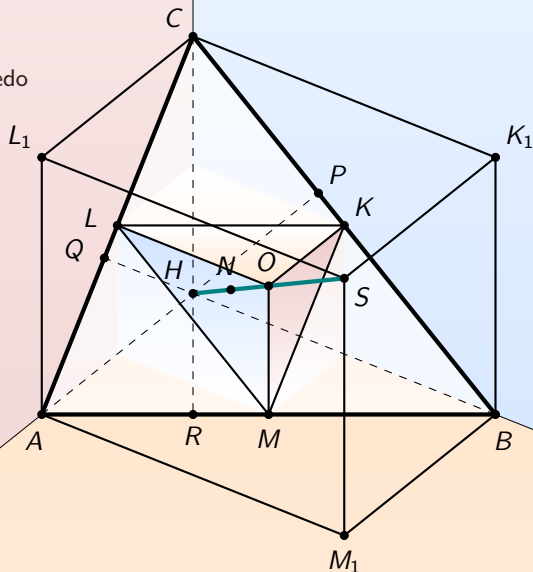
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - L'esagono di Eulero del supertriangolo e i suoi assi delimitano un parallelepipedo con i lati doppi rispetto alla scatola di Eulero (*circoscatola*)
 - Il (corrispondente 3D del) supercentro S è il vertice della circoscatola più vicino all'osservatore



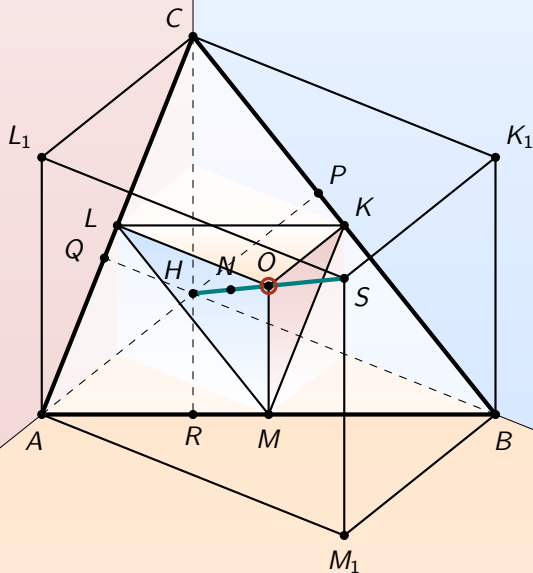
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - L'esagono di Eulero del supertriangolo e i suoi assi delimitano un parallelepipedo con i lati doppi rispetto alla scatola di Eulero (*circoscatola*)
 - Il (corrispondente 3D del) supercentro S è il vertice della circoscatola più vicino all'osservatore
 - Il (corrispondente 3D del) segmento HS è una diagonale della circoscatola



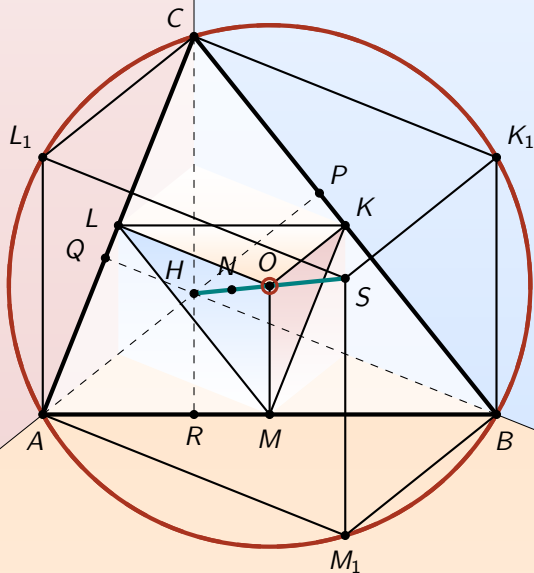
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Il (corrispondente 3D del) circocentro O è il centro della circoscatola



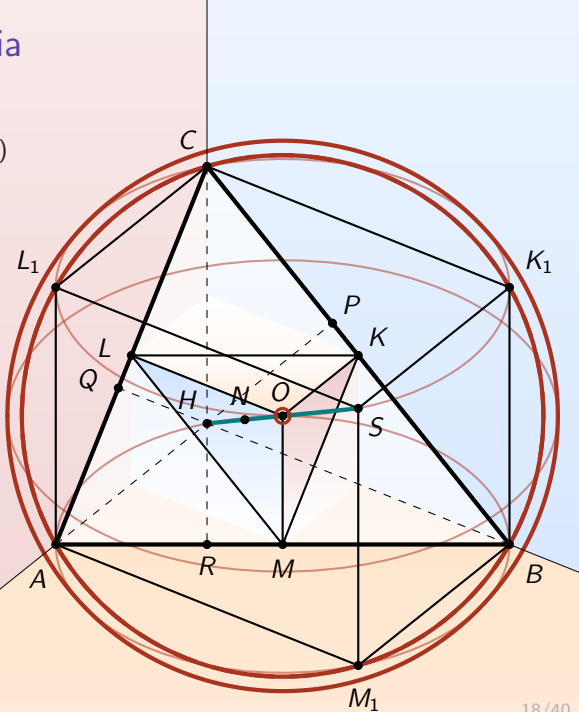
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Il (corrispondente 3D del) circocentro O è il centro della circoscatola
 - La circonferenza circoscritta ad ABC



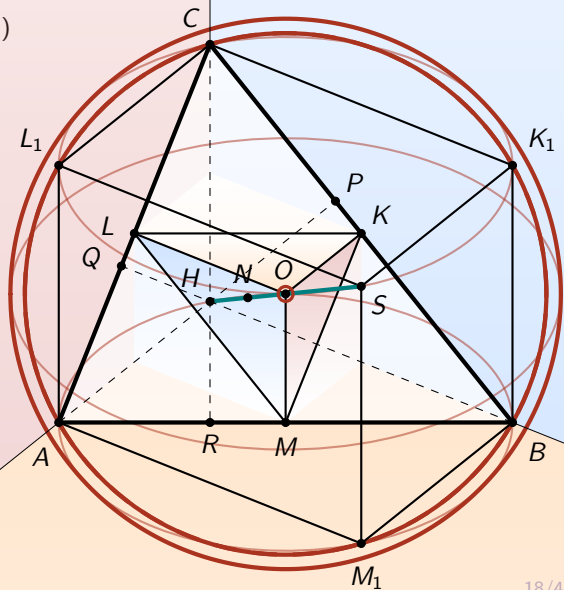
Il mondo oltre Flatlandia

- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Il (corrispondente 3D del) circocentro O è il centro della circoscatola
 - La circonferenza circoscritta ad ABC è l'intersezione con il piano π della sfera circoscritta alla circoscatola (*circosfera*)



Il mondo oltre Flatlandia

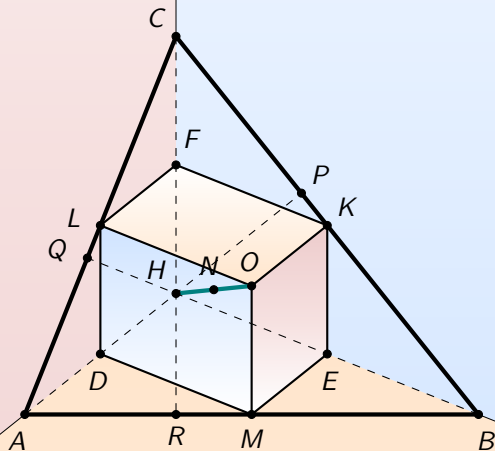
- Mettiamo gli occhiali 3D:
 - Il (corrispondente 3D del) circocentro O è il centro della circoscatola
 - La circonferenza circoscritta ad ABC è l'intersezione con il piano π della sfera circoscritta alla circoscatola (*circosfera*)
 - La circosfera passa per i corrispondenti 3D di H e S , che sono vertici di un suo diametro



Il mondo oltre Flatlandia

- Ricapitolando, abbiamo introdotto:

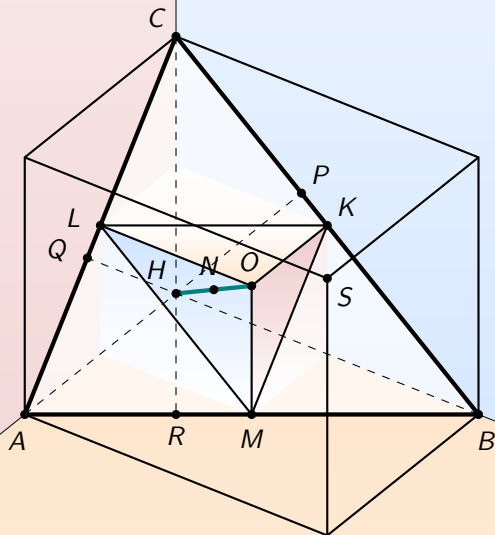
- *Scatola di Eulero*



Il mondo oltre Flatlandia

● Ricapitolando, abbiamo introdotto:

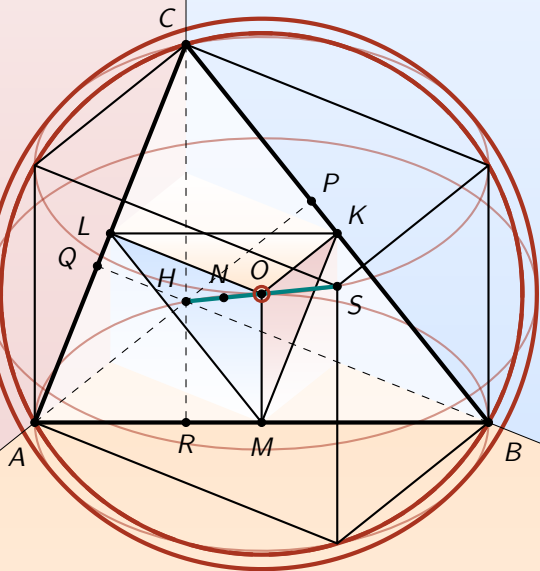
- *Scatola di Eulero*
- *Sfera di Eulero*
- *Circoscatola*



Il mondo oltre Flatlandia

● Ricapitolando, abbiamo introdotto:

- *Scatola di Eulero*
- *Sfera di Eulero*
- *Circoscatola*
- *Circosfera*

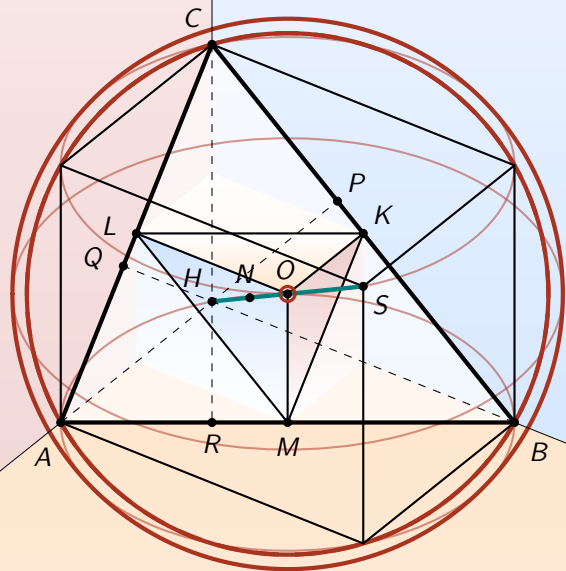


Il mondo oltre Flatlandia

- Ricapitolando, abbiamo introdotto:

- *Scatola di Eulero*
- *Sfera di Eulero*
- *Circoscatola*
- *Circosfera*

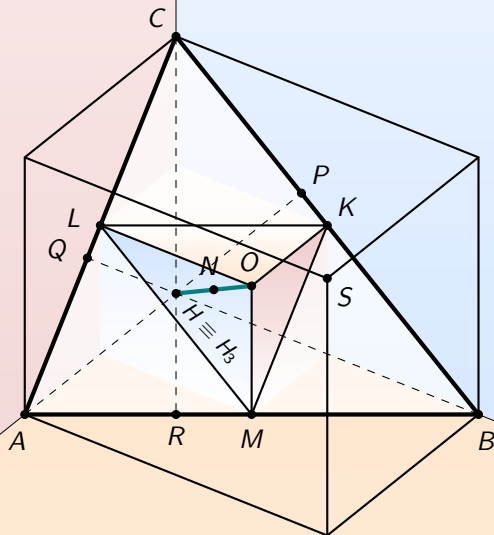
- Ma vogliamo descrivere in modo più preciso questi oggetti



Il mondo oltre Flatlandia

- Descriviamo meglio l'assonometria:

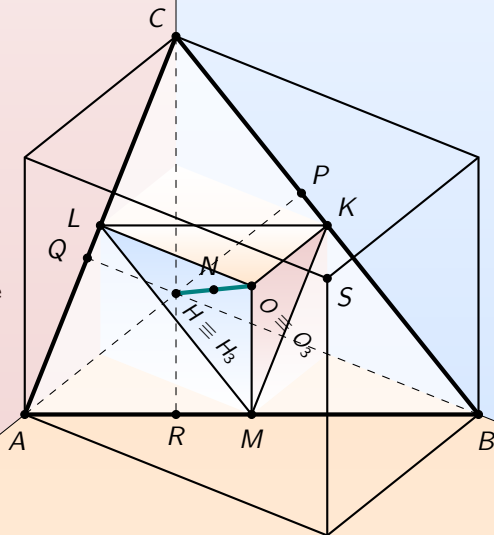
- Per ogni punto X di π , indichiamo con X_3 il corrispondente 3D di X
- Ad esempio, con il punto di vista attuale,
 - l'ortocentro $H \in \pi$ è sovrapposto ad H_3 , origine dello spazio 3D



Il mondo oltre Flatlandia

- Descriviamo meglio l'assonometria:

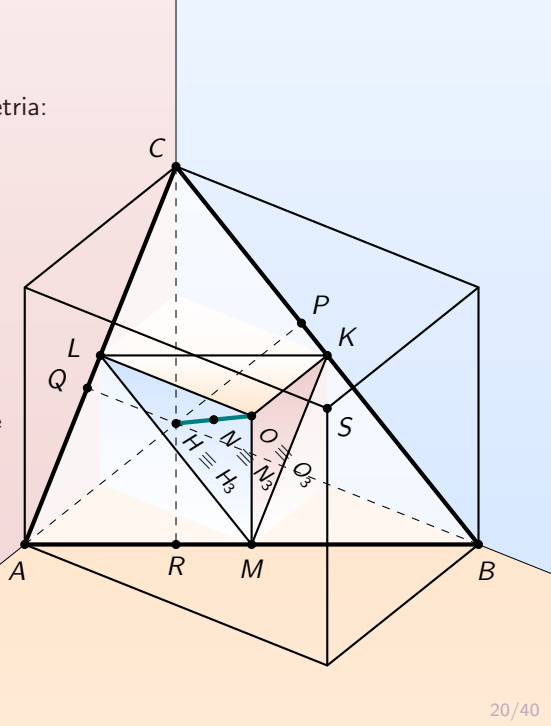
- Per ogni punto X di π , indichiamo con X_3 il corrispondente 3D di X
- Ad esempio, con il punto di vista attuale,
 - l'ortocentro $H \in \pi$ è sovrapposto ad H_3 , origine dello spazio 3D
 - al circocentro $O \in \pi$ si sovrappone O_3 , vertice della scatola di Eulero



Il mondo oltre Flatlandia

- Descriviamo meglio l'assonometria:

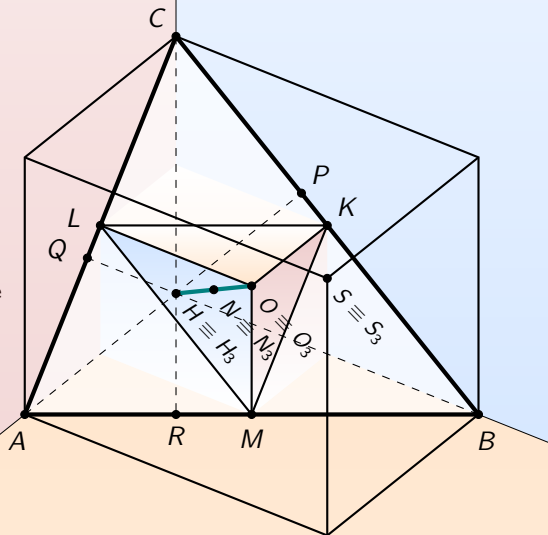
- Per ogni punto X di π , indichiamo con X_3 il corrispondente 3D di X
- Ad esempio, con il punto di vista attuale,
 - l'ortocentro $H \in \pi$ è sovrapposto ad H_3 , origine dello spazio 3D
 - al circocentro $O \in \pi$ si sovrappone O_3 , vertice della scatola di Eulero
 - stessa cosa per il novecentro N



Il mondo oltre Flatlandia

- Descriviamo meglio l'assonometria:

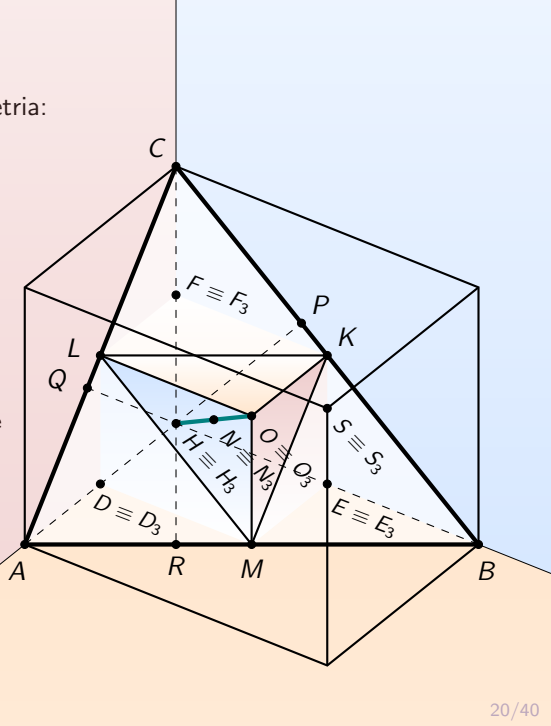
- Per ogni punto X di π , indichiamo con X_3 il corrispondente 3D di X
- Ad esempio, con il punto di vista attuale,
 - l'ortocentro $H \in \pi$ è sovrapposto ad H_3 , origine dello spazio 3D
 - al circocentro $O \in \pi$ si sovrappone O_3 , vertice della scatola di Eulero
 - stessa cosa per il novecentro N , il supercentro S



Il mondo oltre Flatlandia

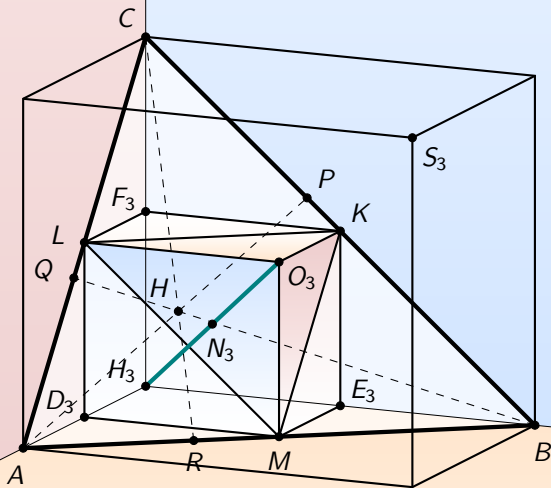
- Descriviamo meglio l'assonometria:

- Per ogni punto X di π , indichiamo con X_3 il corrispondente 3D di X
- Ad esempio, con il punto di vista attuale,
 - l'ortocentro $H \in \pi$ è sovrapposto ad H_3 , origine dello spazio 3D
 - al circocentro $O \in \pi$ si sovrappone O_3 , vertice della scatola di Eulero
 - stessa cosa per il novecentro N , il supercentro S e i punti D, E, F



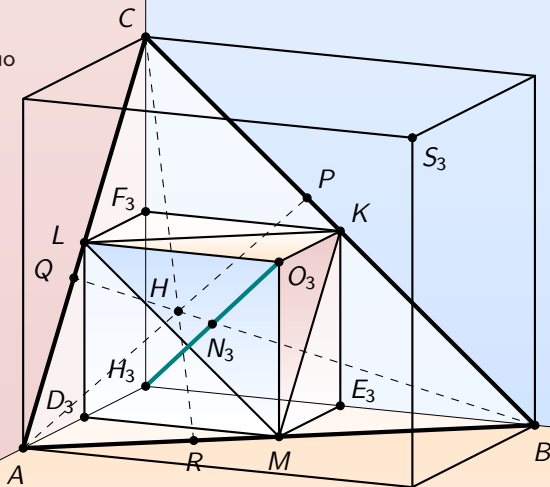
Il mondo oltre Flatlandia

- Cambiamo punto di vista



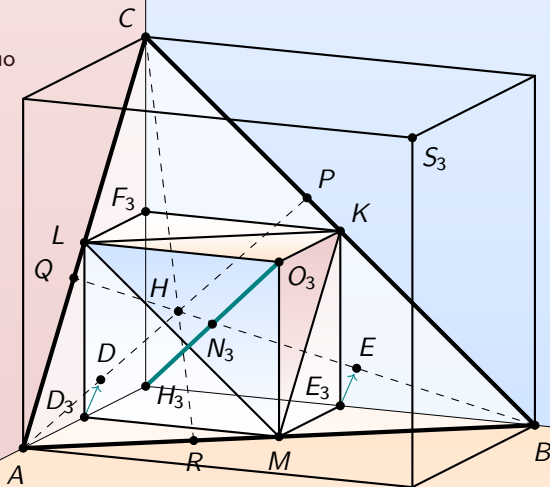
Il mondo oltre Flatlandia

- Cambiamo punto di vista
 - Ogni punto X è la proiezione su π del suo corrispondente X_3



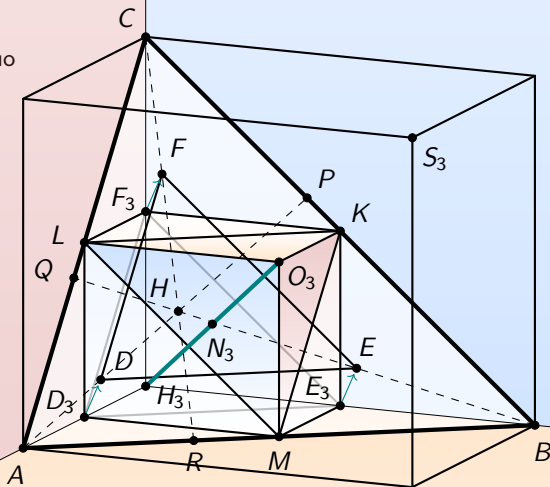
Il mondo oltre Flatlandia

- Cambiamo punto di vista
 - Ogni punto X è la proiezione su π del suo corrispondente X_3
 - Punti di Eulero 3D:
 - $D_3 \mapsto D$
 - $E_3 \mapsto E$



Il mondo oltre Flatlandia

- Cambiamo punto di vista
 - Ogni punto X è la proiezione su π del suo corrispondente X_3
 - Punti di Eulero 3D:
 - $D_3 \mapsto D$
 - $E_3 \mapsto E$
 - $F_3 \mapsto F$
 - La proiezione di $D_3E_3F_3$ è il triangolo di Eulero

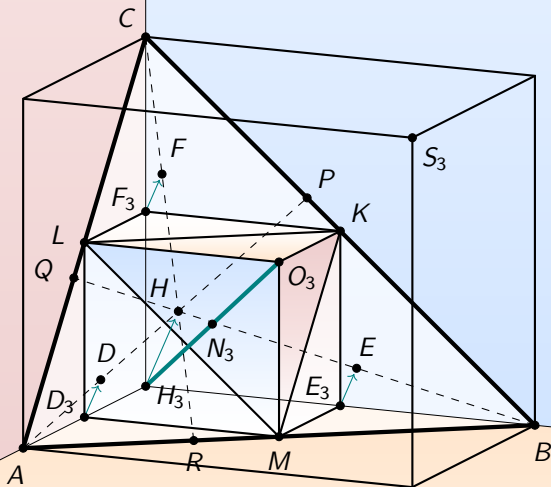


Il mondo oltre Flatlandia

- Cambiamo punto di vista

- Punti notevoli 3D:

- $H_3 \mapsto H$

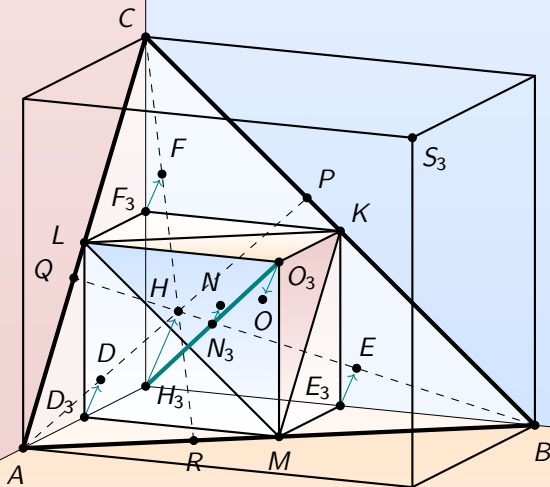


Il mondo oltre Flatlandia

- Cambiamo punto di vista

- Punti notevoli 3D:

- $H_3 \mapsto H$
- $N_3 \mapsto N$
- $O_3 \mapsto O$



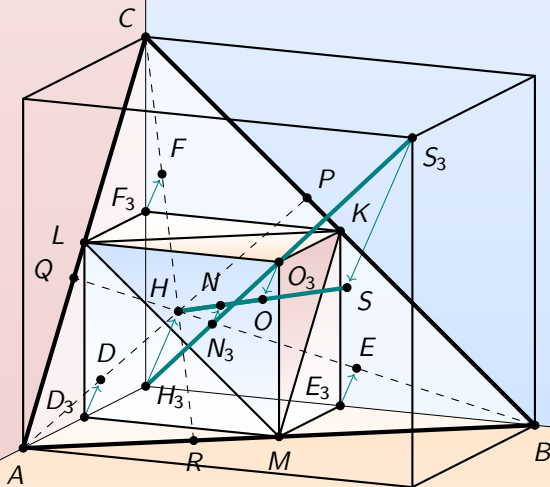
Il mondo oltre Flatlandia

- Cambiamo punto di vista

- Punti notevoli 3D:

- $H_3 \mapsto H$
- $N_3 \mapsto N$
- $O_3 \mapsto O$
- $S_3 \mapsto S$

- La proiezione su π della diagonale H_3S_3 della circoscotola è la retta di Eulero



Il mondo oltre Flatlandia

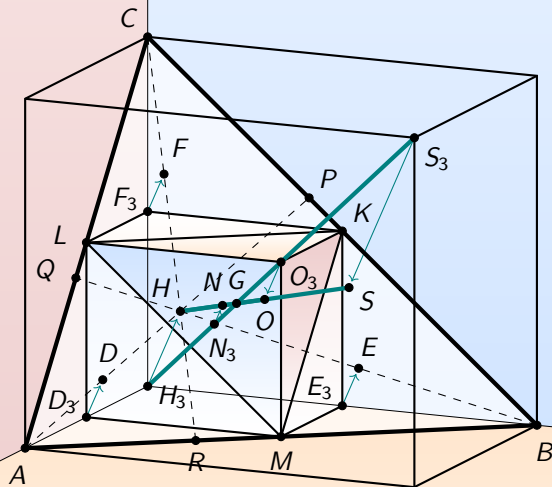
- Cambiamo punto di vista

- Punti notevoli 3D:

- $H_3 \mapsto H$
- $N_3 \mapsto N$
- $O_3 \mapsto O$
- $S_3 \mapsto S$

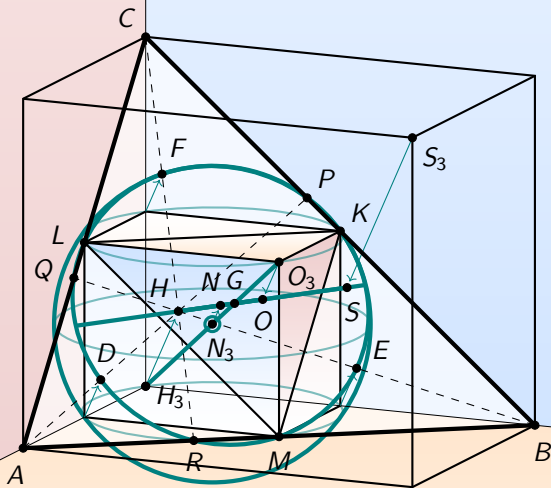
- La proiezione su π della diagonale H_3S_3 della circoscotola è la retta di Eulero

- H_3S_3 interseca π nel baricentro G



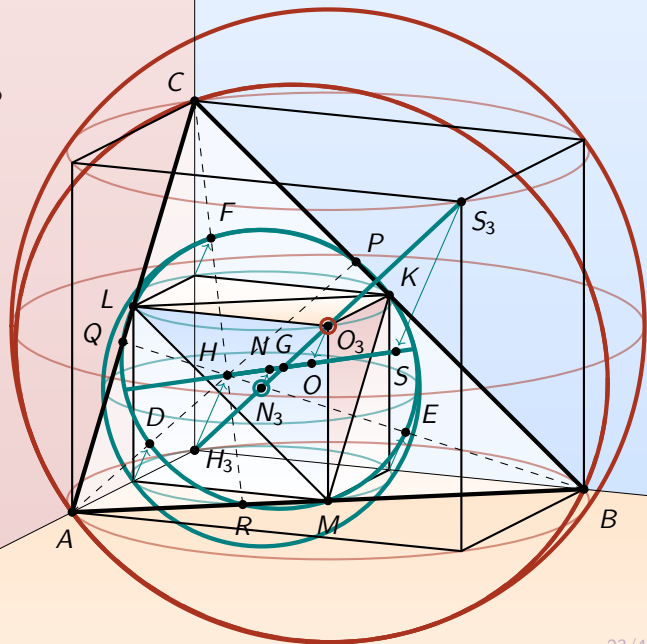
Il mondo oltre Flatlandia

- Guardiamo
 - la sfera di Eulero



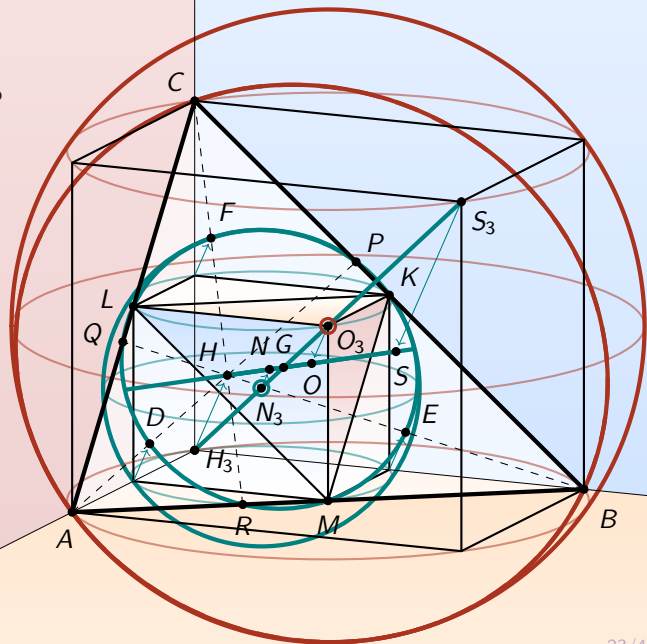
Il mondo oltre Flatlandia

- Guardiamo
 - la sfera di Eulero
 - e la circo-sfera



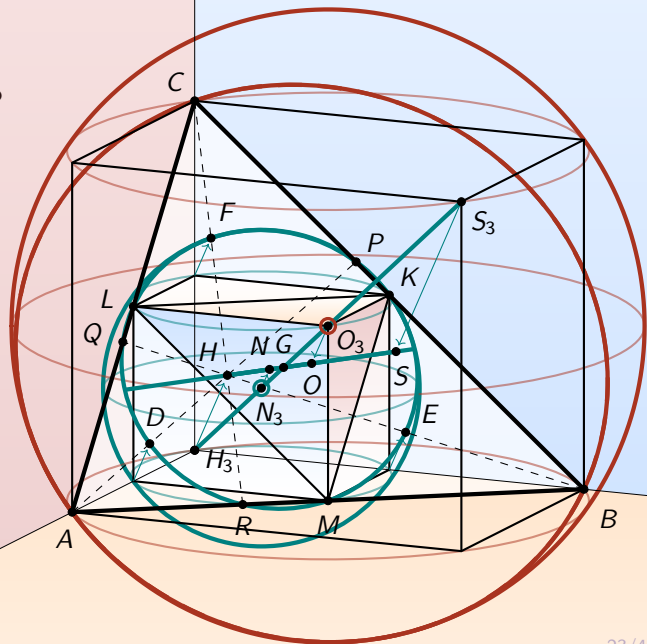
Il mondo oltre Flatlandia

- Guardiamo
 - la sfera di Eulero
 - e la circo-sfera
- Proprietà:
 - Il raggio H_3N_3 della prima è la metà del raggio H_3O_3 della seconda



Il mondo oltre Flatlandia

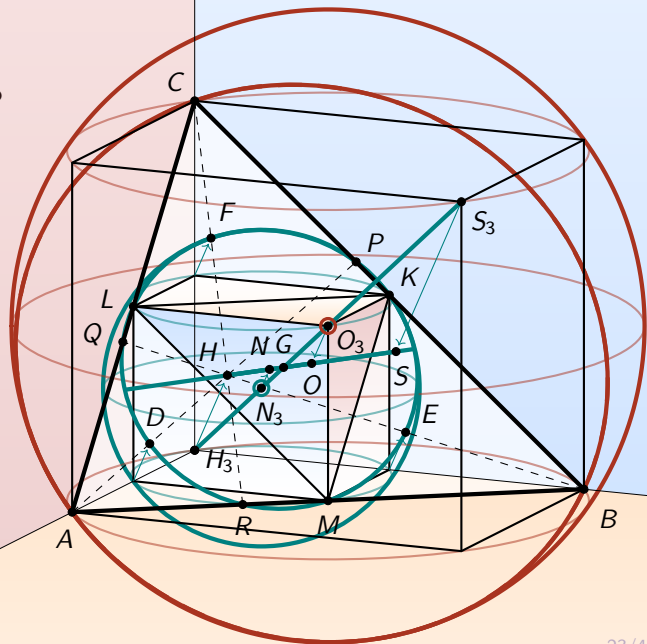
- Guardiamo
 - la sfera di Eulero
 - e la circo-sfera
- Proprietà:
 - Le due sfere sono tangenti tra loro nell'origine



Il mondo oltre Flatlandia

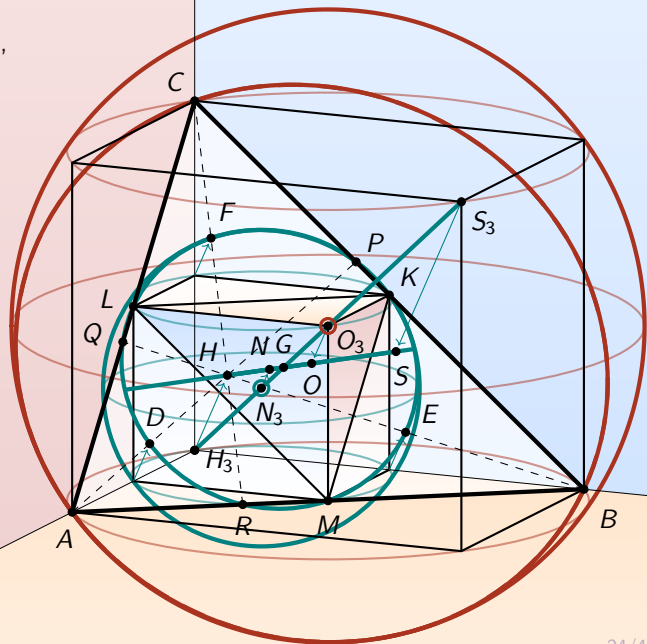
- Guardiamo
 - la sfera di Eulero
 - e la circofera
- Proprietà:
 - Le due sfere sono tangenti tra loro nell'origine

(Entrambe tangenti al piano passante per l'origine e perpendicolare ad H_3S_3)



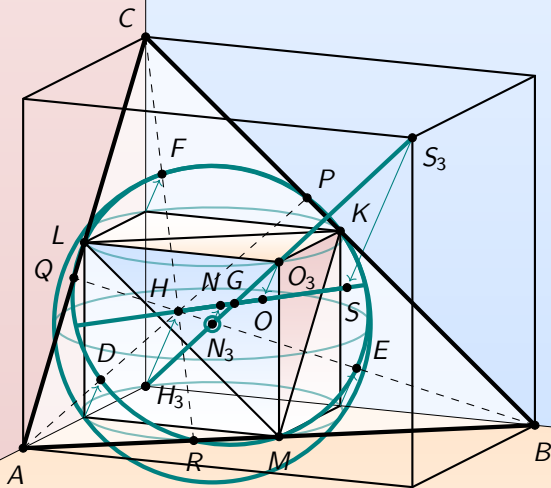
Il mondo oltre Flatlandia

- Svuotiamo la stanza, un pezzo alla volta



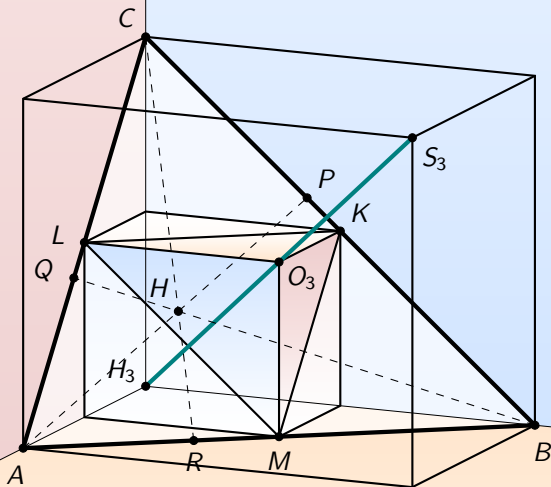
Il mondo oltre Flatlandia

- Svuotiamo la stanza, un pezzo alla volta



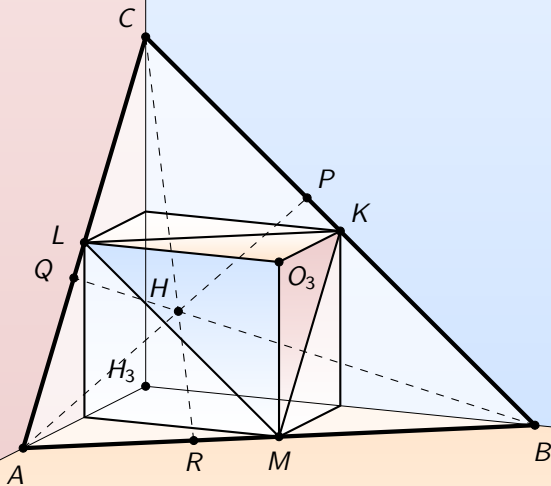
Il mondo oltre Flatlandia

- Svuotiamo la stanza, un pezzo alla volta



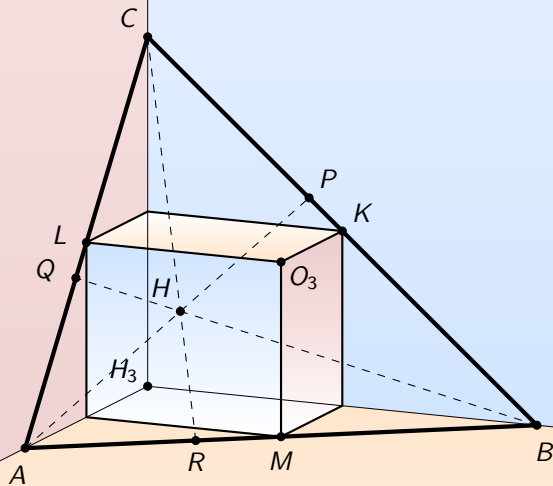
Il mondo oltre Flatlandia

- Svuotiamo la stanza, un pezzo alla volta



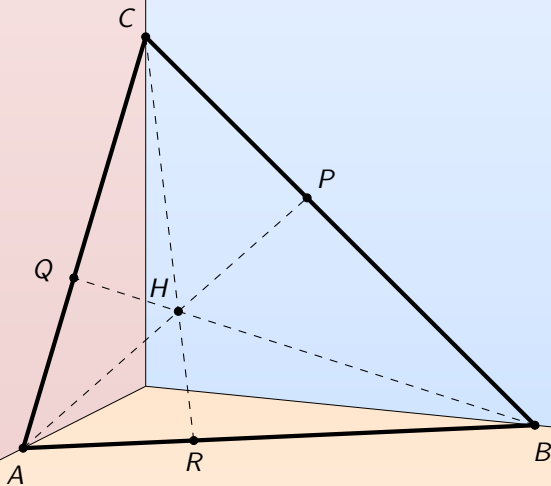
Il mondo oltre Flatlandia

- Svuotiamo la stanza, un pezzo alla volta



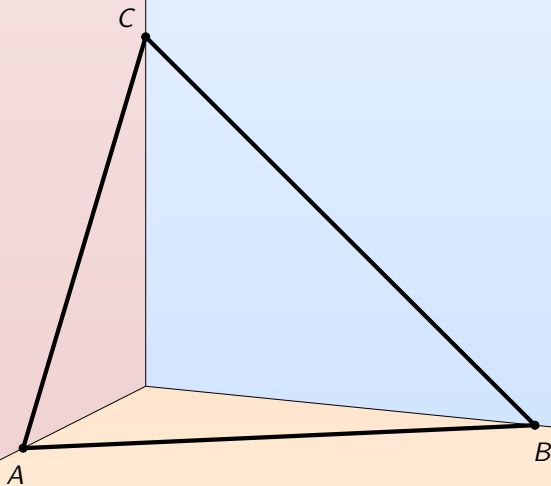
Il mondo oltre Flatlandia

- Svuotiamo la stanza, un pezzo alla volta



Il mondo oltre Flatlandia

- Svuotiamo la stanza, un pezzo alla volta



Il mondo oltre Flatlandia

Costruzione 3D

- Ripercorriamo ora la costruzione un passo alla volta, a partire da un triangolo acutangolo ABC con lati lunghi a, b, c

Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a , b , c

Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a , b , c
- Collochiamo nello spazio 3D
 - $A(x_A, 0, 0)$



A

Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a , b , c
- Collochiamo nello spazio 3D
 - $A(x_A, 0, 0)$
 - $B(0, y_B, 0)$



A

B

Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a , b , c
- Collochiamo nello spazio 3D
 - $A(x_A, 0, 0)$
 - $B(0, y_B, 0)$
 - $C(0, 0, z_C)$



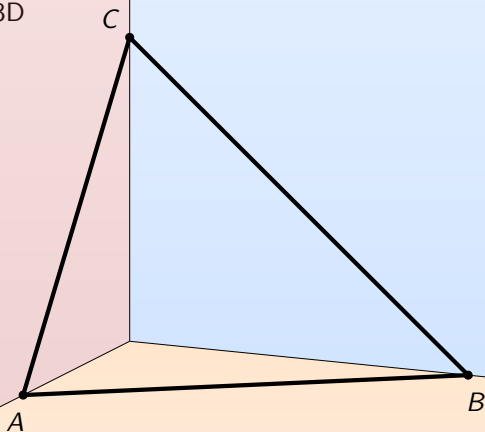
A

B

C

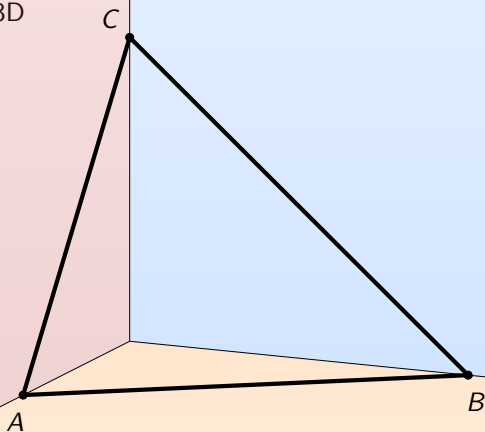
Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a , b , c
- Collochiamo nello spazio 3D
 - $A(x_A, 0, 0)$
 - $B(0, y_B, 0)$
 - $C(0, 0, z_C)$



Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a , b , c
- Collochiamo nello spazio 3D
 - $A(x_A, 0, 0)$
 - $B(0, y_B, 0)$
 - $C(0, 0, z_C)$
- Dalle relazioni
 - $x_A^2 + y_B^2 = c^2$
 - $x_A^2 + z_C^2 = b^2$
 - $y_B^2 + z_C^2 = a^2$



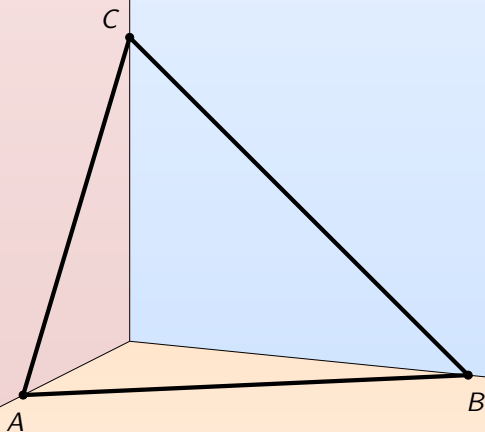
Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a, b, c
- Si ottengono

- $x_A = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$

- $y_B = \sqrt{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}}$

- $z_C = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$



Costruzione 3D

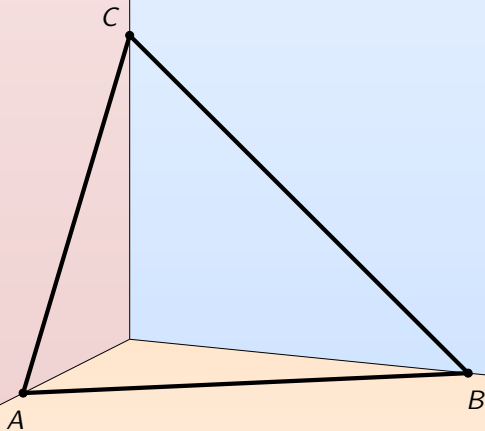
- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a, b, c
- Si ottengono

- $x_A = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}$

- $y_B = \sqrt{\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}}$

- $z_C = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$

(ben definite e positive se e solo se ABC è acutangolo)

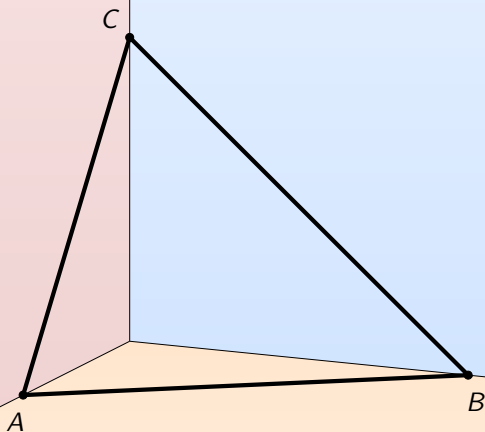


Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a, b, c
- Se poniamo

- $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$

(*quadrmetro* di ABC)



Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a, b, c

- Se poniamo

- $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$

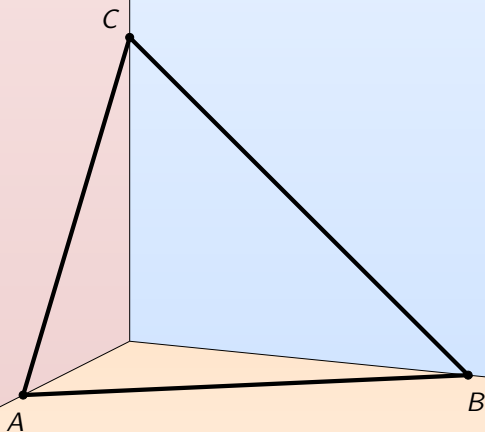
(*quadrimetro* di ABC)

- Le precedenti si scrivono

- $x_A = \sqrt{q^2 - a^2}$

- $y_B = \sqrt{q^2 - b^2}$

- $z_C = \sqrt{q^2 - c^2}$



Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a, b, c

- Se poniamo

- $q = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}}$

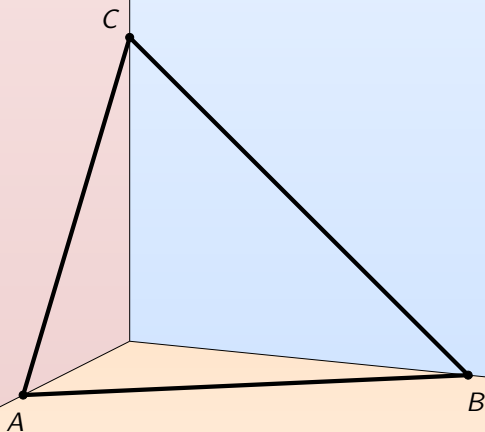
(*quadrimetro* di ABC)

- Inoltre, ricordando che

- $a^2 = y_B^2 + z_C^2$

- $b^2 = x_A^2 + z_C^2$

- $c^2 = x_A^2 + y_B^2$

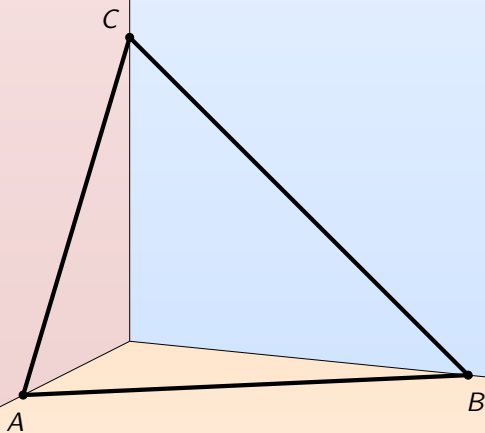


Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a, b, c
- Si ha anche

- $q = \sqrt{x_A^2 + y_B^2 + z_C^2}$

(*quadrimetro* di ABC)



Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a, b, c

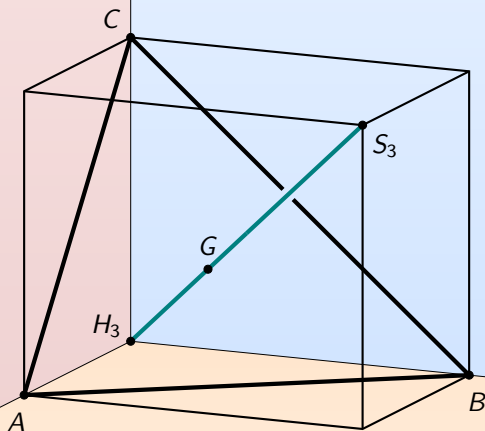
- Si ha anche

- $q = \sqrt{x_A^2 + y_B^2 + z_C^2}$

(*quadrimento* di ABC)

- Interpretazione:

- Il quadrimento è la lunghezza della diagonale H_3S_3 della circoscatola



Costruzione 3D

- ABC triangolo acutangolo con lati lunghi a, b, c

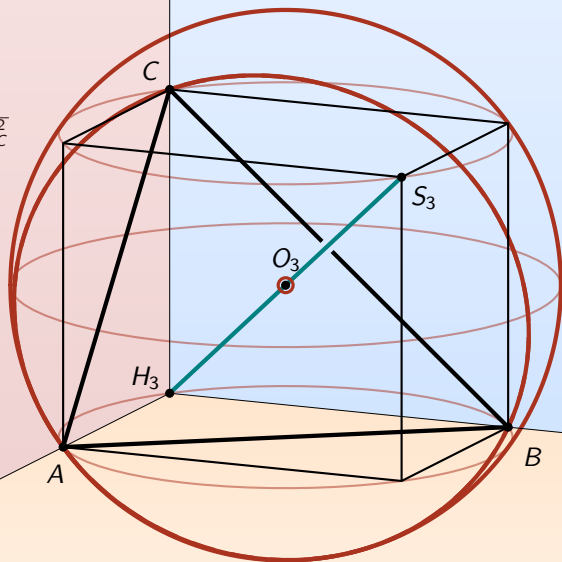
- Si ha anche

- $q = \sqrt{x_A^2 + y_B^2 + z_C^2}$

(*quadrimento*)

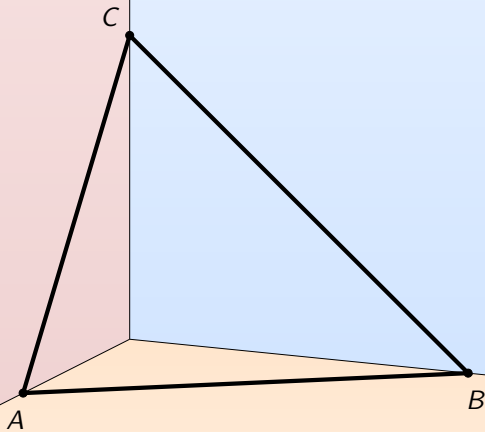
- Interpretazione:

- Il quadrimento è la lunghezza della diagonale della circoscatola, nonché il diametro della circosfera



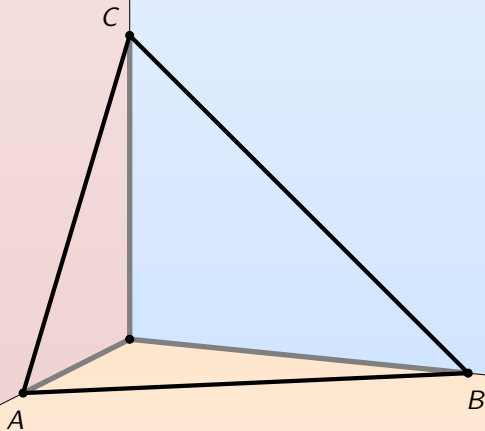
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo



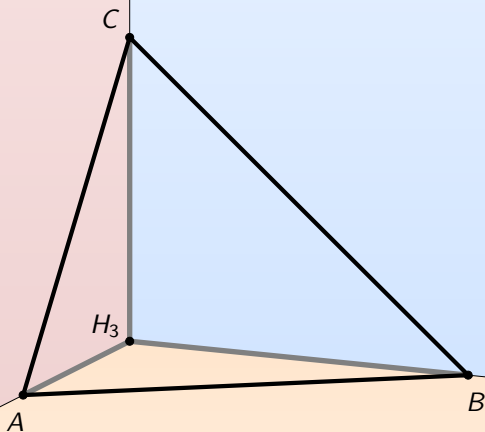
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Altezze 3D*: segmenti passanti per i vertici e perpendicolari al piano cartesiano a cui il vertice non appartiene



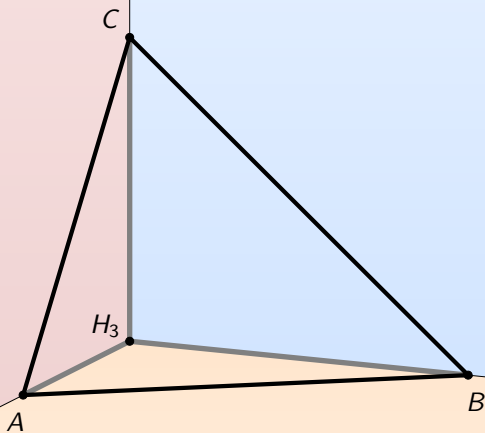
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Altezze 3D*: segmenti passanti per i vertici e perpendicolari al piano cartesiano a cui il vertice non appartiene
- *Ortocentro 3D* (H_3): punto di intersezione delle tre altezze 3D



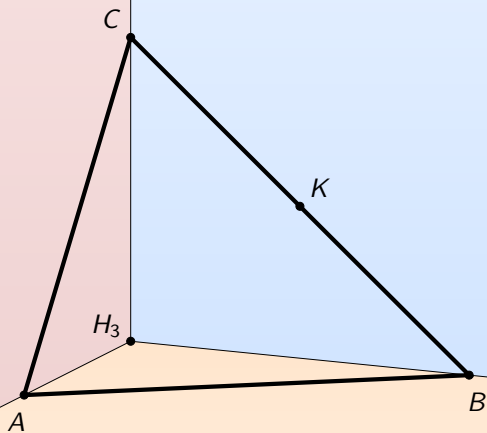
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Altezze 3D*: segmenti passanti per i vertici e perpendicolari al piano cartesiano a cui il vertice non appartiene
- *Ortocentro 3D* (H_3): punto di intersezione delle tre altezze 3D
- Coordinate: $H_3(0, 0, 0)$



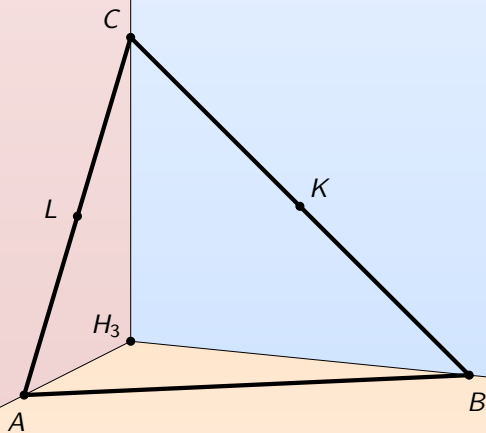
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Punti medi (coordinate):
 - $K\left(0, \frac{y_B}{2}, \frac{z_C}{2}\right)$



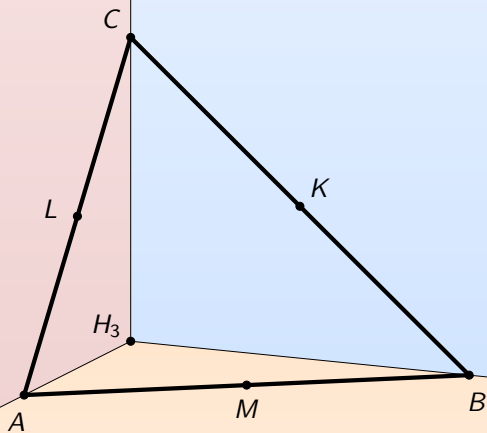
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Punti medi (coordinate):
 - $K\left(0, \frac{y_B}{2}, \frac{z_C}{2}\right)$
 - $L\left(\frac{x_A}{2}, 0, \frac{z_C}{2}\right)$



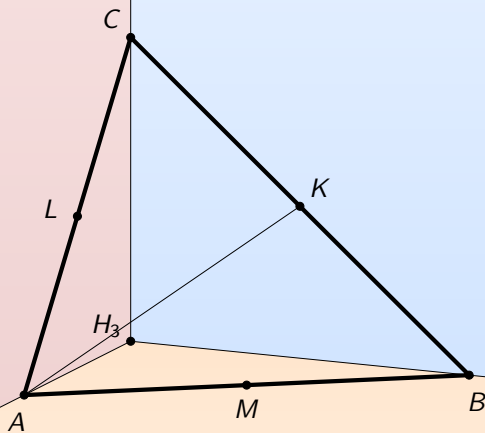
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Punti medi (coordinate):
 - $K\left(0, \frac{y_B}{2}, \frac{z_C}{2}\right)$
 - $L\left(\frac{x_A}{2}, 0, \frac{z_C}{2}\right)$
 - $M\left(\frac{x_A}{2}, \frac{y_B}{2}, 0\right)$



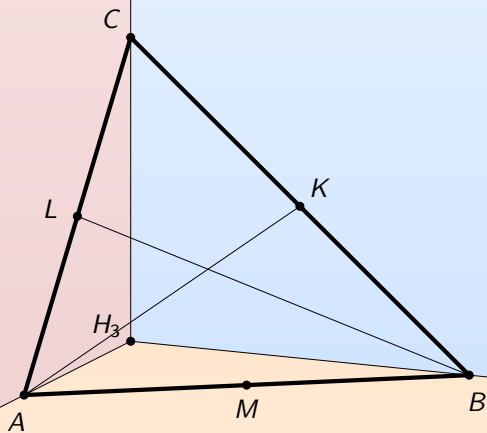
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Mediane: AK



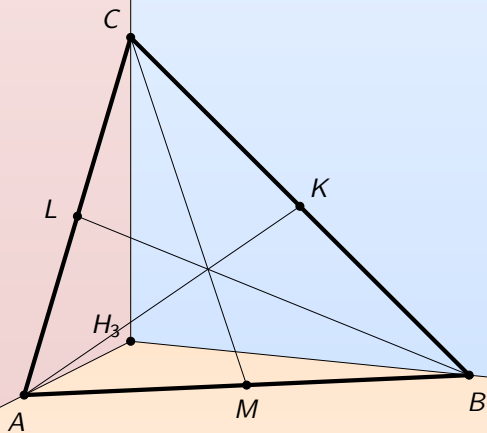
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Mediane: AK, BL



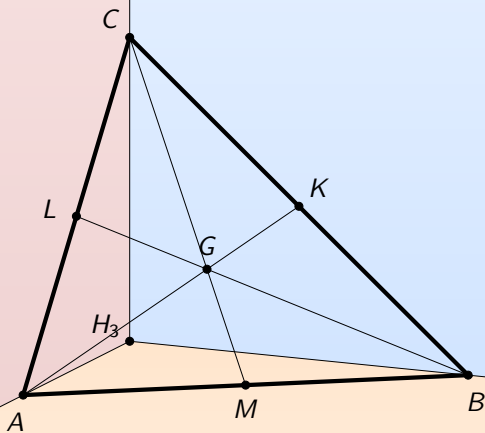
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- Mediane: AK , BL , CM



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

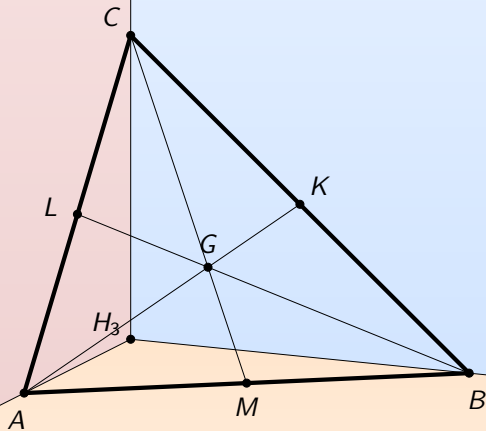
- ABC triangolo (qualsiasi)
- Mediane: AK , BL , CM
- *Baricentro 3D* (G):
punto di intersezione
delle mediane (coincide
con il baricentro 2D)



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

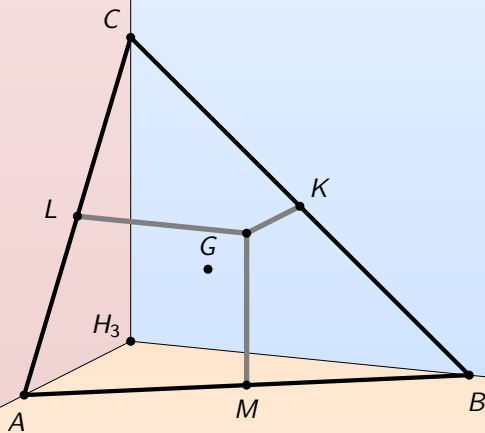
- ABC triangolo (qualsiasi)
- Mediane: AK , BL , CM
- *Baricentro 3D* (G):
punto di intersezione
delle mediane (coincide
con il baricentro 2D)
- Coordinate:

$$G\left(\frac{x_A}{3}, \frac{y_B}{3}, \frac{z_C}{3}\right)$$



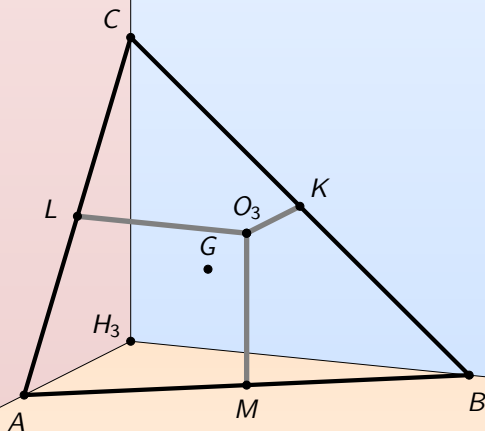
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Assi 3D*: segmenti passanti per i punti medi e perpendicolari al piano cartesiano a cui il punto medio appartiene



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

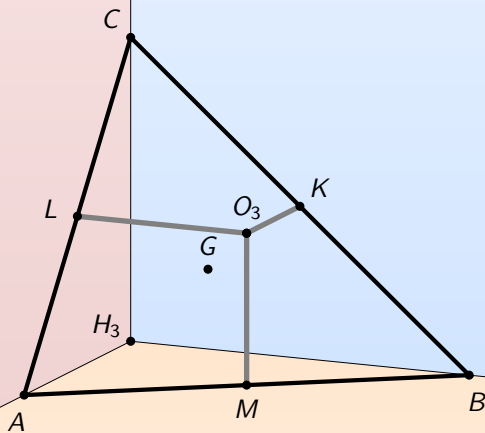
- ABC triangolo acutangolo
- *Assi 3D*: segmenti passanti per i punti medi e perpendicolari al piano cartesiano a cui il punto medio appartiene
- *Circocentro 3D* (O_3): punto di intersezione dei tre assi 3D



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

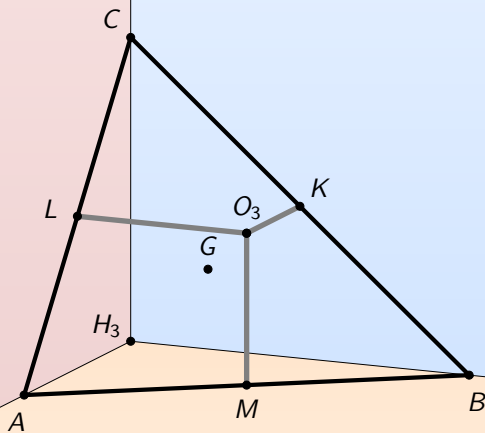
- ABC triangolo acutangolo
- *Assi 3D*: segmenti passanti per i punti medi e perpendicolari al piano cartesiano a cui il punto medio appartiene
- *Circocentro 3D* (O_3): punto di intersezione dei tre assi 3D
- Coordinate:

$$O_3\left(\frac{x_A}{2}, \frac{y_B}{2}, \frac{z_C}{2}\right)$$



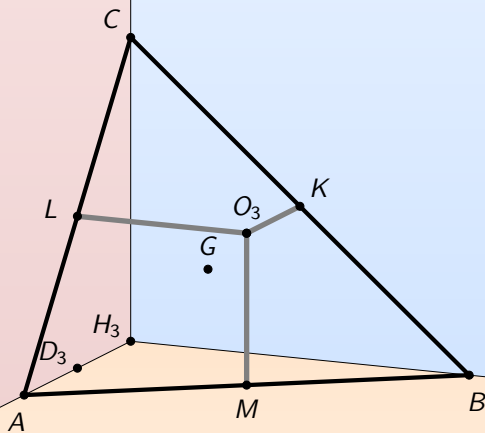
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Punti di Eulero 3D*:
punti medi delle
tre altezze 3D



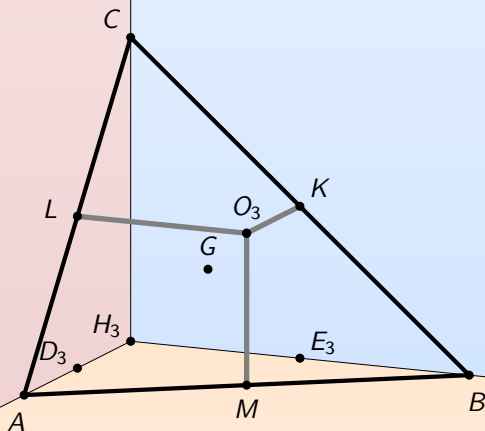
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Punti di Eulero 3D*:
punti medi delle
tre altezze 3D
- Coordinate:
 - $D_3\left(\frac{x_A}{2}, 0, 0\right)$



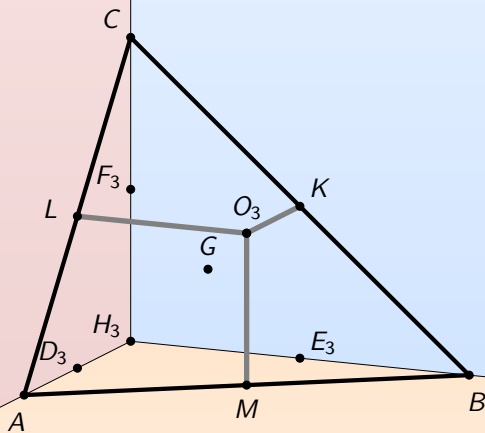
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Punti di Eulero 3D*:
punti medi delle
tre altezze 3D
- Coordinate:
 - $D_3\left(\frac{x_A}{2}, 0, 0\right)$
 - $E_3\left(0, \frac{y_B}{2}, 0\right)$



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

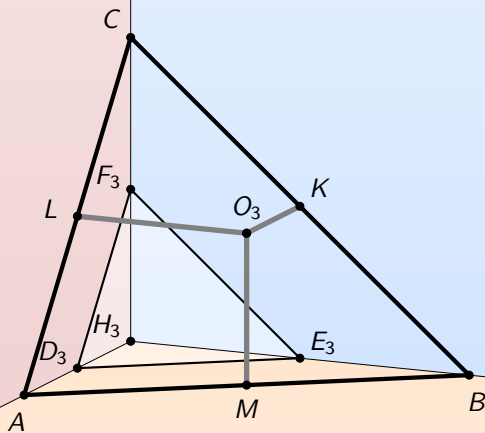
- ABC triangolo acutangolo
- *Punti di Eulero 3D*:
punti medi delle
tre altezze 3D
- Coordinate:
 - $D_3\left(\frac{x_A}{2}, 0, 0\right)$
 - $E_3\left(0, \frac{y_B}{2}, 0\right)$
 - $F_3\left(0, 0, \frac{z_C}{2}\right)$



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Triangolo di Eulero 3D:*

$D_3E_3F_3$



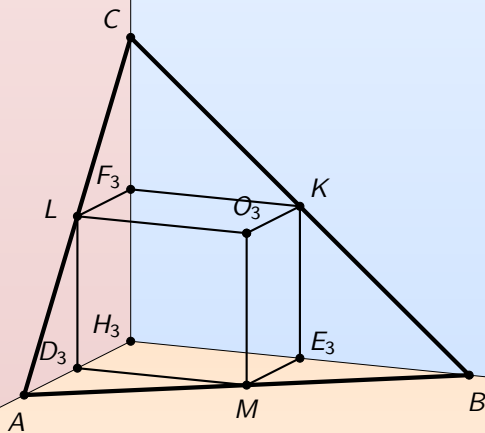
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo

- *Triangolo di Eulero 3D:*

$$D_3E_3F_3$$

- *Scatola di Eulero*



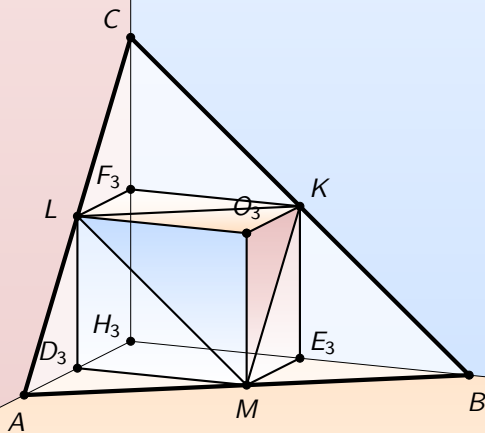
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo

- *Triangolo di Eulero 3D:*

$$D_3E_3F_3$$

- *Scatola di Eulero*

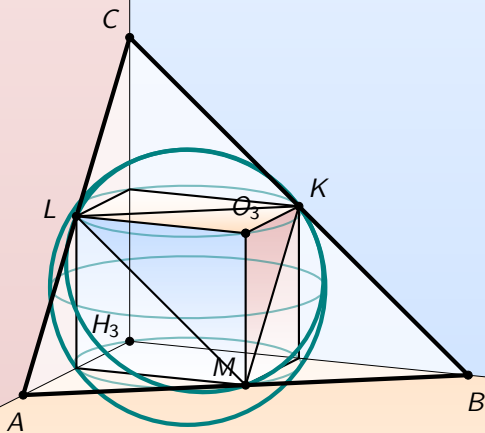


Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Triangolo di Eulero 3D:*

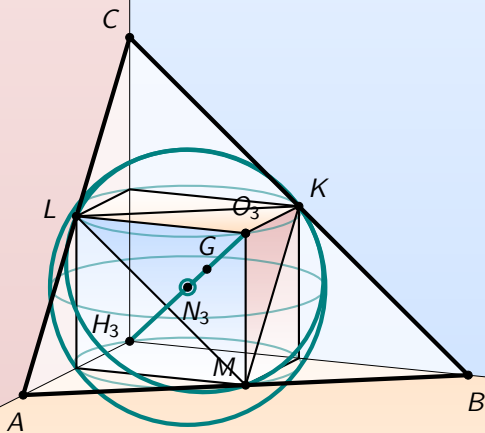
$$D_3E_3F_3$$

- *Scatola di Eulero*
- *Sfera di Eulero:*
sfera circoscritta alla
scatola di Eulero



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

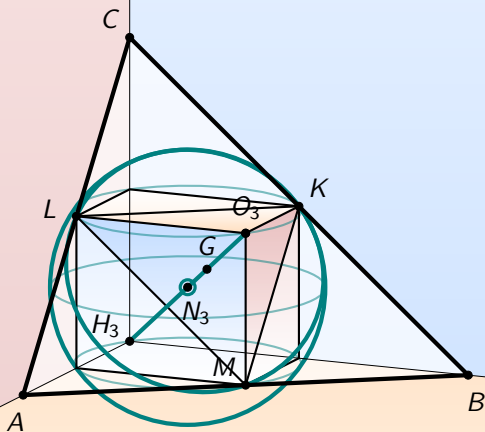
- ABC triangolo acutangolo
- *Novacentro 3D* (o *Undicentro*):
punto medio di H_3O_3 ,
ovvero centro della
scatola e della
sfera di Eulero



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

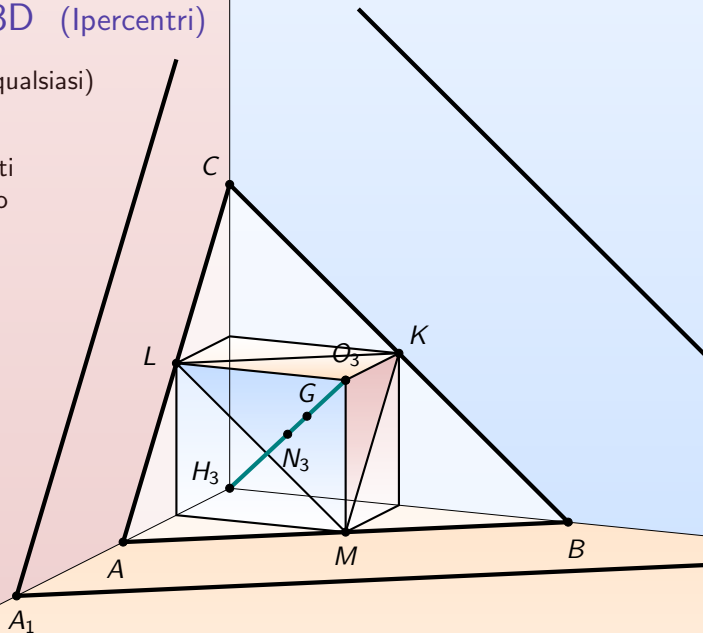
- ABC triangolo acutangolo
- *Novacentro 3D* (o *Undicentro*):
punto medio di H_3O_3 ,
ovvero centro della
scatola e della
sfera di Eulero
- Coordinate:

$$N_3 \left(\frac{x_A}{4}, \frac{y_B}{4}, \frac{z_C}{4} \right)$$



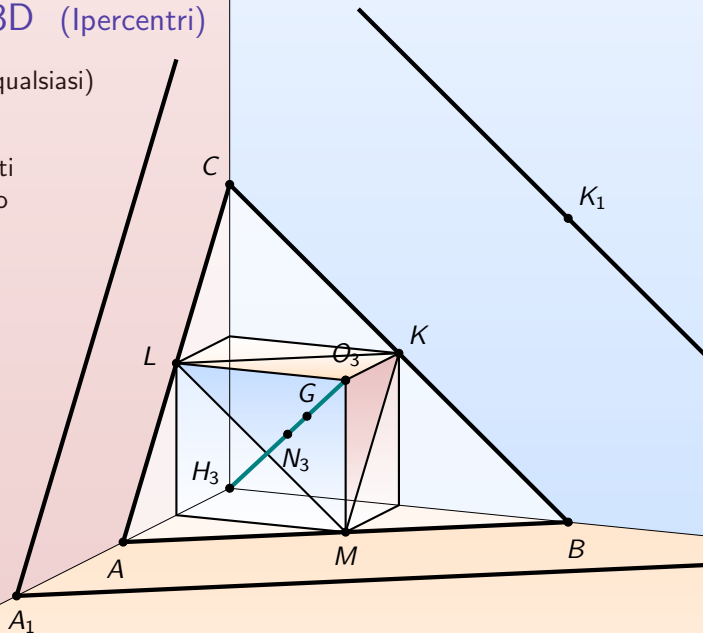
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Punti supermedi*:
punti medi dei lati
del supertriangolo



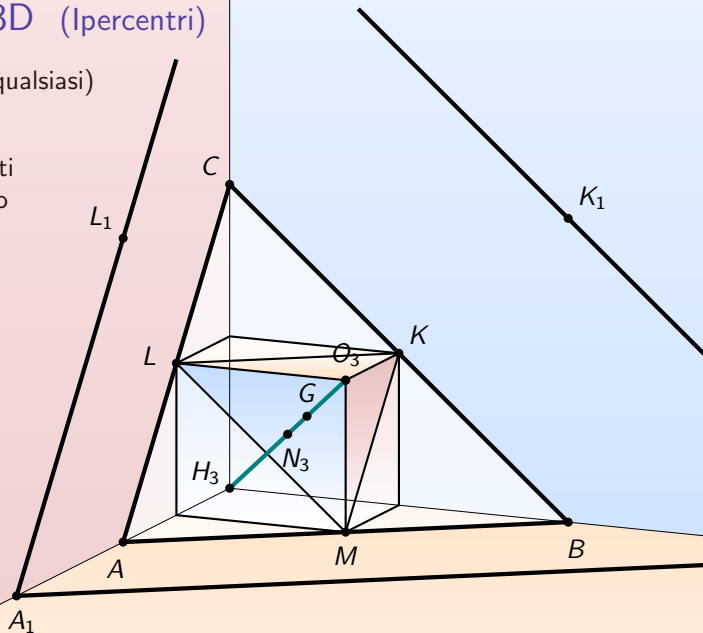
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Punti supermedi*:
punti medi dei lati
del supertriangolo
 - $K_1(0, y_B, z_C)$



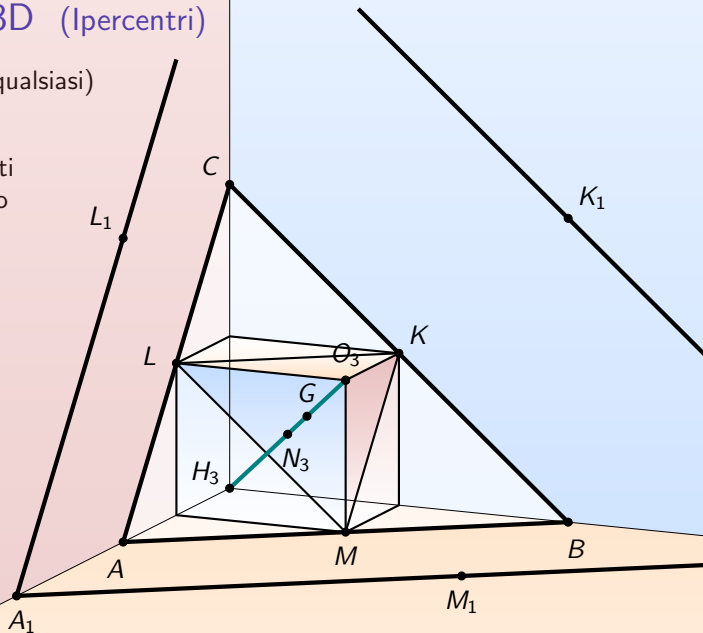
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Punti supermedi*:
punti medi dei lati
del supertriangolo
 - $K_1(0, y_B, z_C)$
 - $L_1(x_A, 0, z_C)$



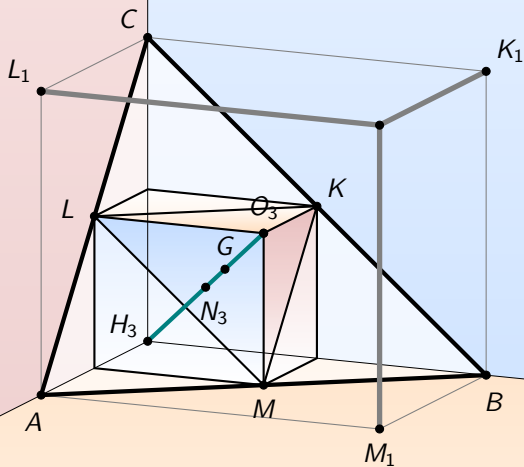
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo (qualsiasi)
- *Punti supermedi*:
punti medi dei lati
del supertriangolo
 - $K_1(0, y_B, z_C)$
 - $L_1(x_A, 0, z_C)$
 - $M_1(x_A, y_B, 0)$



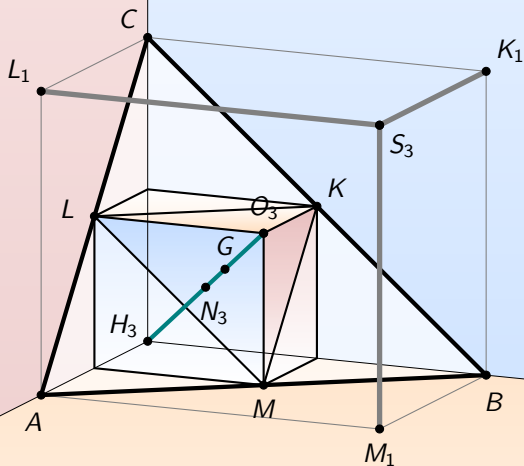
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Superassi 3D*:
segmenti passanti
per i punti supermedi
e perpendicolari al
piano cartesiano a cui
il punto appartiene



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

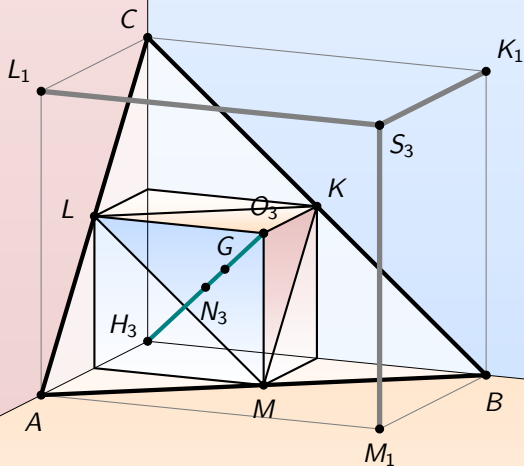
- ABC triangolo acutangolo
- *Superassi 3D*:
segmenti passanti
per i punti supermedi
e perpendicolari al
piano cartesiano a cui
il punto appartiene
- *Supercentro 3D* (S_3):
punto di intersezione
dei tre superassi 3D



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

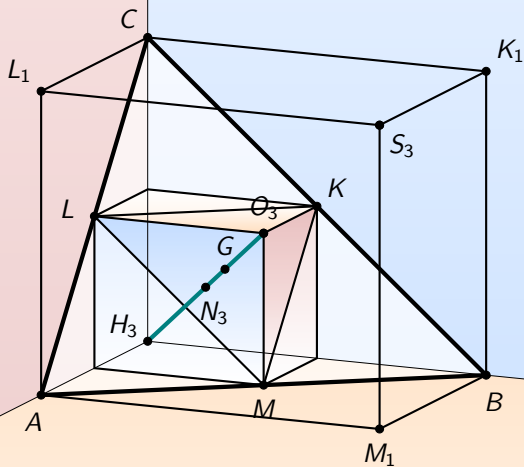
- ABC triangolo acutangolo
- *Superassi 3D*:
segmenti passanti
per i punti supermedi
e perpendicolari al
piano cartesiano a cui
il punto appartiene
- *Supercentro 3D* (S_3):
punto di intersezione
dei tre superassi 3D
- Coordinate:

$$S_3(x_A, y_B, z_C)$$



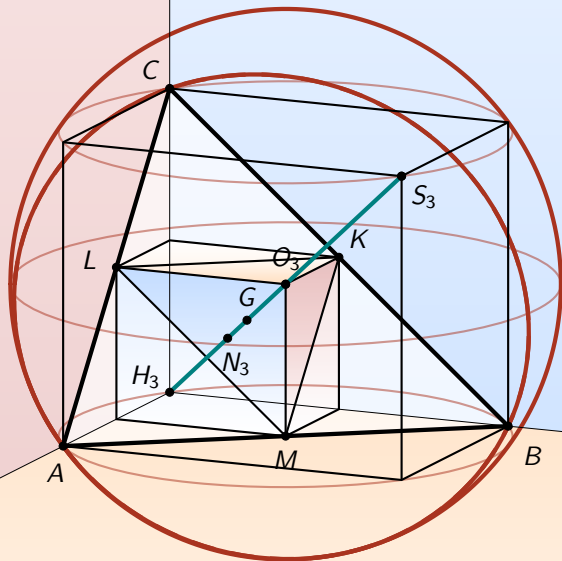
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Circoscato* di ABC



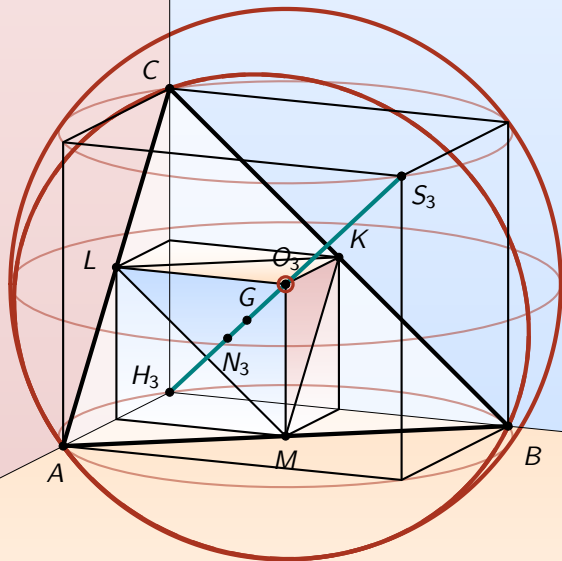
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Circoscatola* di ABC
- *Circosfera*: sfera circoscritta alla circoscatola



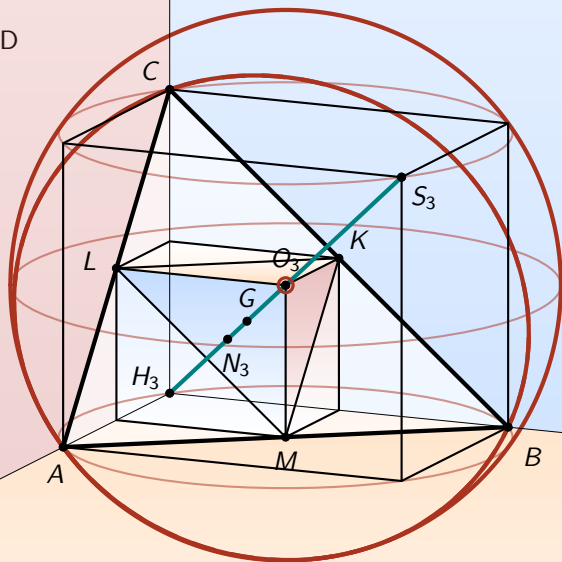
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- *Circoscatola* di ABC
- *Circosfera*: sfera circoscritta alla circoscatola
- Proprietà:
 - Il circocentro 3D è il punto medio di H_3S_3 , ovvero il centro della circoscatola e della circosfera



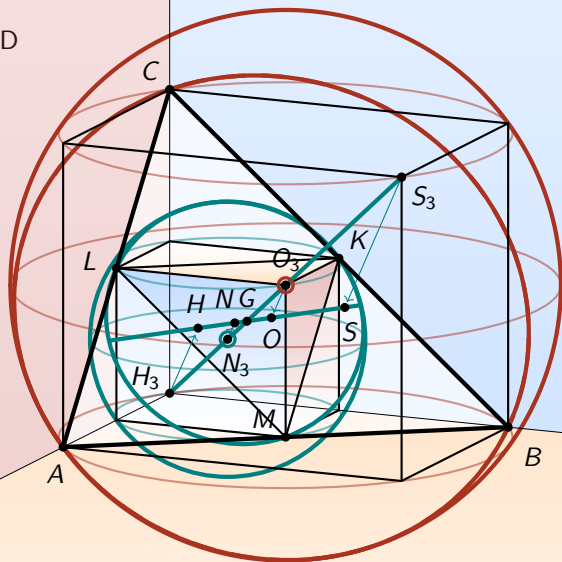
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- Ogni punto notevole 2D è la proiezione su π del suo ipercentro corrispondente

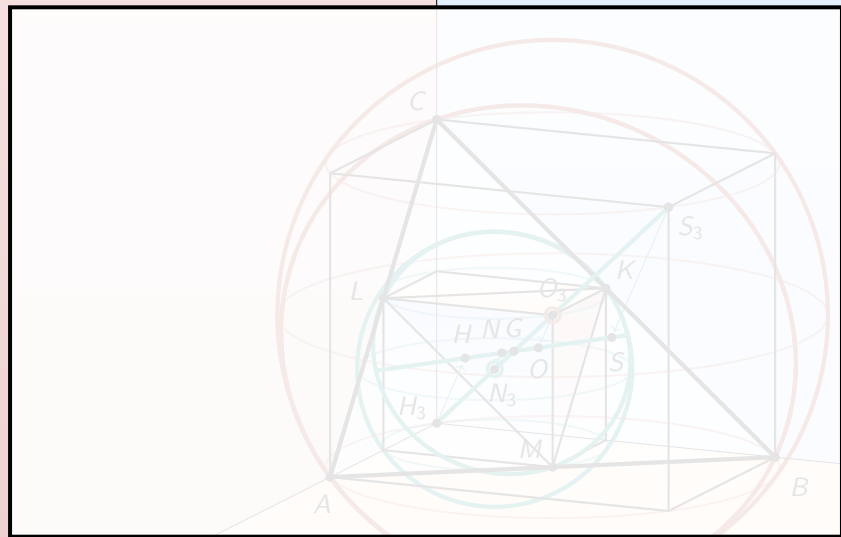


Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- Ogni punto notevole 2D è la proiezione su π del suo ipercentro corrispondente



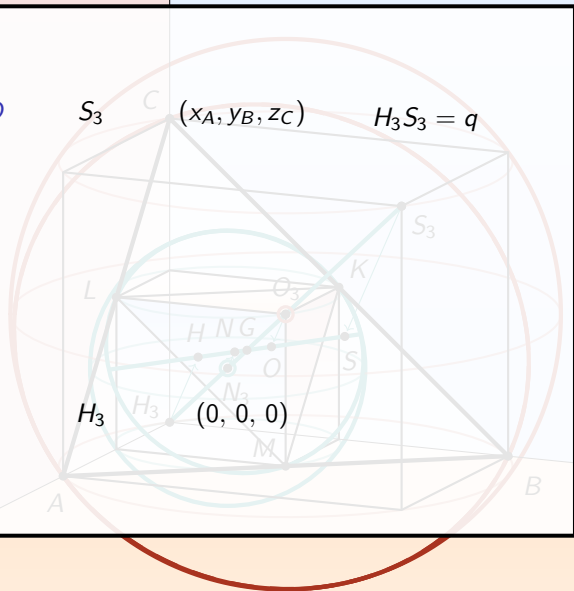
Punti notevoli 3D (Ipercentri)



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

Supercentro 3D

Ortocentro 3D



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

Supercentro 3D

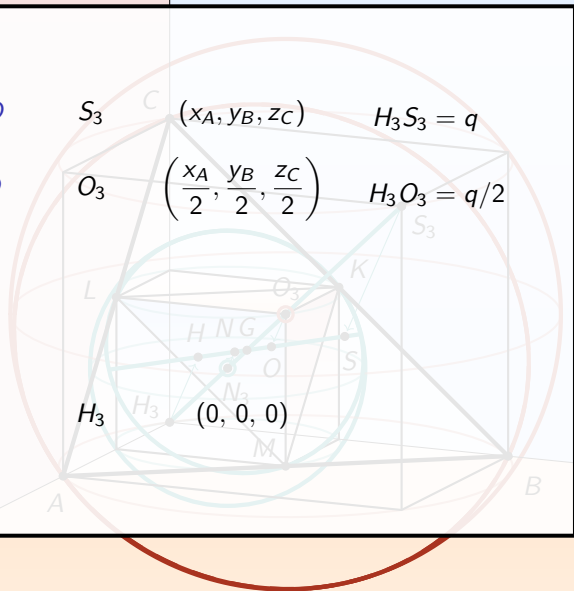
S_3 (x_A, y_B, z_C) $H_3 S_3 = q$

Circocentro 3D

O_3 $\left(\frac{x_A}{2}, \frac{y_B}{2}, \frac{z_C}{2}\right)$ $H_3 O_3 = q/2$

Ortocentro 3D

H_3 $(0, 0, 0)$



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

Supercentro 3D

$$S_3 \quad (x_A, y_B, z_C) \quad H_3 S_3 = q$$

Circocentro 3D

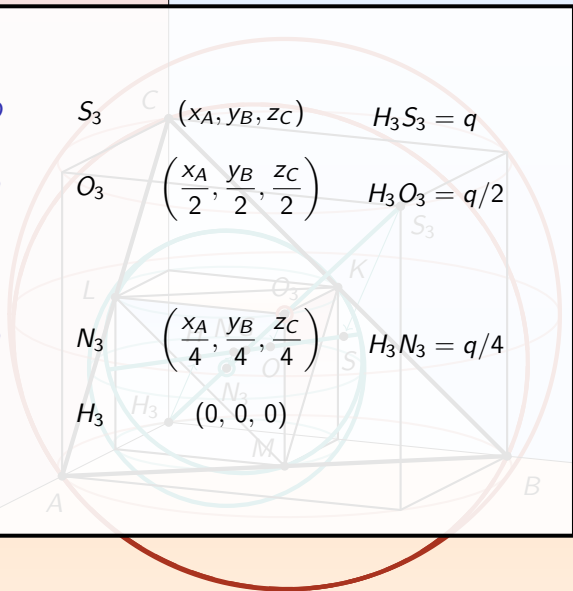
$$O_3 \quad \left(\frac{x_A}{2}, \frac{y_B}{2}, \frac{z_C}{2} \right) \quad H_3 O_3 = q/2$$

Novocentro 3D

$$N_3 \quad \left(\frac{x_A}{4}, \frac{y_B}{4}, \frac{z_C}{4} \right) \quad H_3 N_3 = q/4$$

Ortocentro 3D

$$H_3 \quad (0, 0, 0)$$



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

Supercentro 3D

$$S_3 \quad (x_A, y_B, z_C) \quad H_3 S_3 = q$$

Circocentro 3D

$$O_3 \quad \left(\frac{x_A}{2}, \frac{y_B}{2}, \frac{z_C}{2} \right) \quad H_3 O_3 = q/2$$

Baricentro

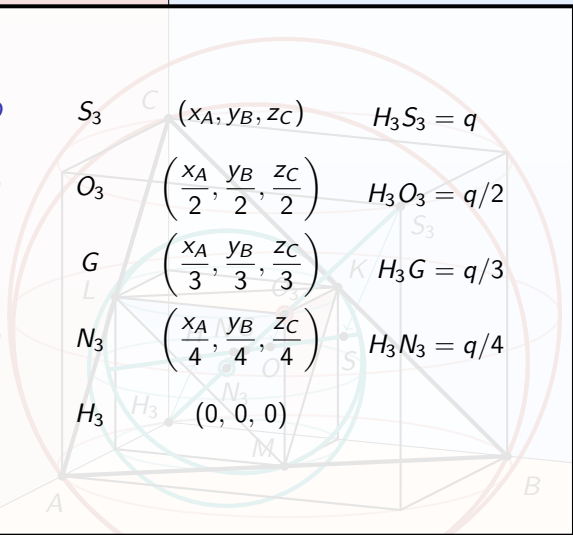
$$G \quad \left(\frac{x_A}{3}, \frac{y_B}{3}, \frac{z_C}{3} \right) \quad H_3 G = q/3$$

Novocentro 3D

$$N_3 \quad \left(\frac{x_A}{4}, \frac{y_B}{4}, \frac{z_C}{4} \right) \quad H_3 N_3 = q/4$$

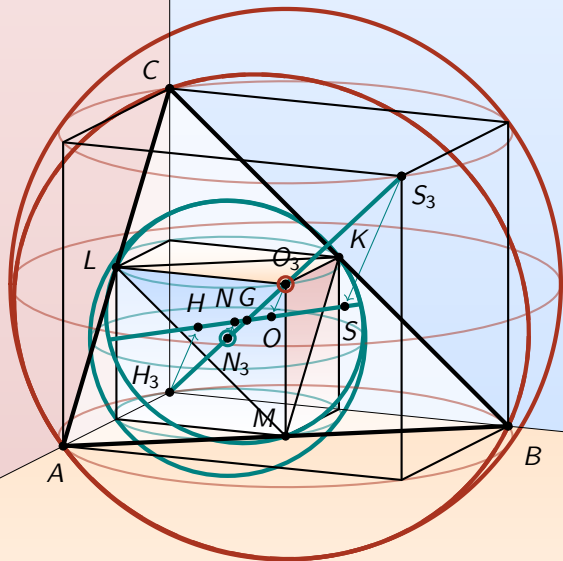
Ortocentro 3D

$$H_3 \quad (0, 0, 0)$$



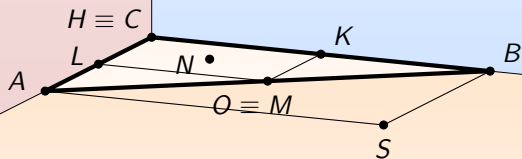
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo



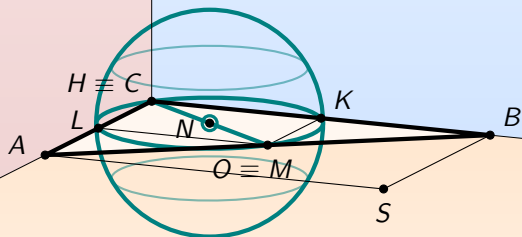
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- ABC triangolo rettangolo



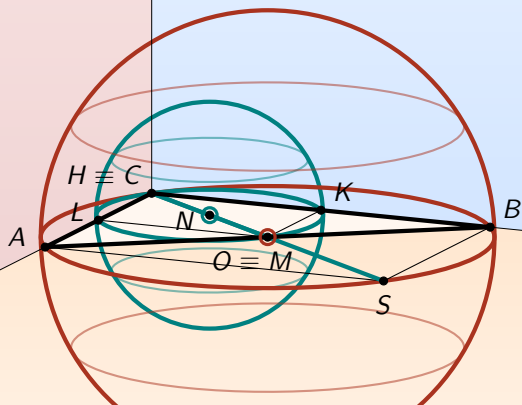
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- ABC triangolo rettangolo



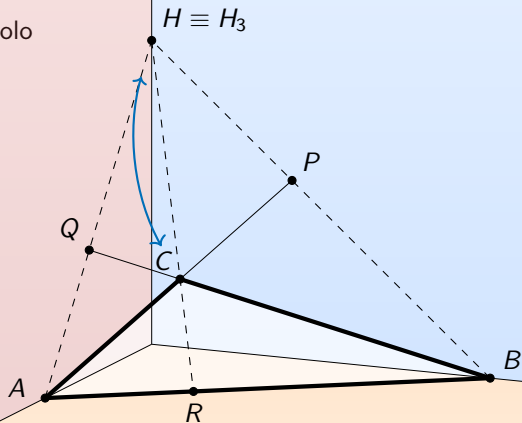
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- ABC triangolo rettangolo



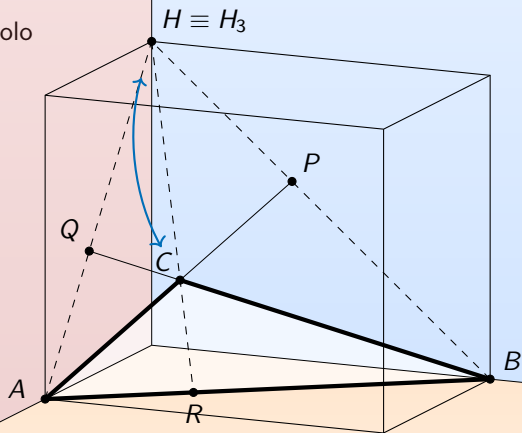
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- ABC triangolo rettangolo
- ABC triangolo ottusangolo



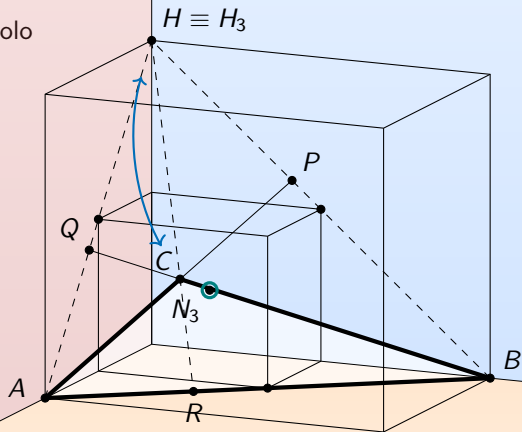
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- ABC triangolo rettangolo
- ABC triangolo ottusangolo



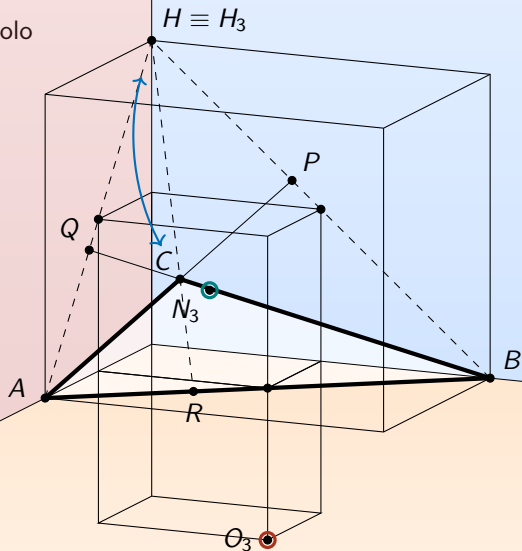
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- ABC triangolo rettangolo
- ABC triangolo ottusangolo



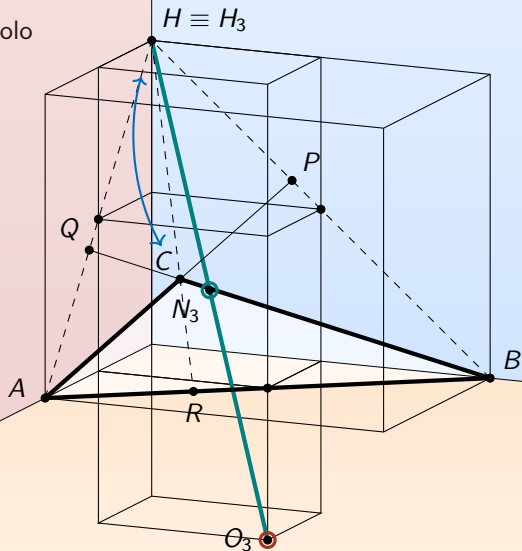
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- ABC triangolo rettangolo
- ABC triangolo ottusangolo



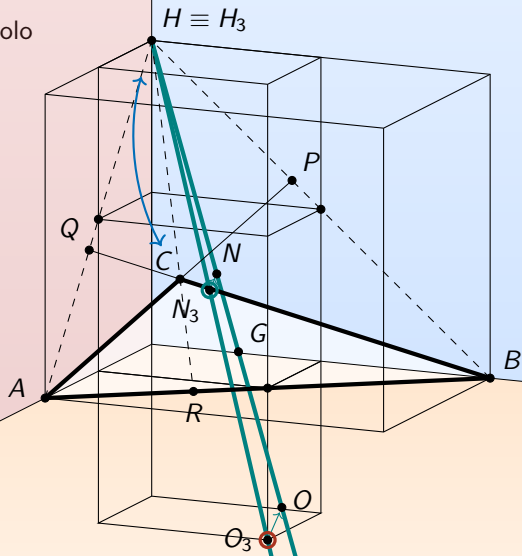
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- ABC triangolo rettangolo
- ABC triangolo ottusangolo



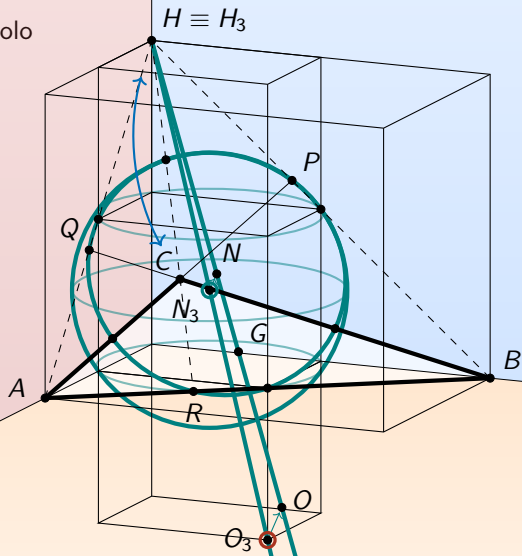
Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- ABC triangolo rettangolo
- ABC triangolo ottusangolo



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- ABC triangolo rettangolo
- ABC triangolo ottusangolo



Punti notevoli 3D (Ipercentri)

- ABC triangolo acutangolo
- ABC triangolo rettangolo
- ABC triangolo ottusangolo

