



XXVII Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 1 – Venerdì 8 Maggio 2026



Ministero dell'Istruzione
e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [★].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \quad \sqrt{3} = 1.7321 \quad \sqrt{5} = 2.2361 \quad \sqrt{7} = 2.6458 \quad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio:** termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio:** termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio:** termine della gara.

1. Alla Scuola Matematica Superiore

Gaia Fuselli

La prof.ssa Sibilla Riemann, docente di Divinazione, ha dato a ciascun studente un dado magico, ma equo, a forma di tetraedro regolare con 4 facce numerate da 1 a 4. Ciascuno dovrà lanciare il dado 4 volte segnando i risultati ottenuti in ordine chiamandoli (a, b, c, d) , ma prima di iniziare a lanciare dovrà prevedere il valore di $ad + bcd + d^2$. Hardy non ha ascoltato una parola della spiegazione e dice «otterrò un valore dispari!». Qual è la probabilità che la previsione di Hardy sia corretta? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione 1. Visto che sono eventi indipendenti, possiamo supporre che i risultati in ordine siano (d, b, c, a) . Se d fosse pari, sicuramente il valore di $S = ad + bcd + d^2$ sarà pari, e quindi la previsione di Hardy non è corretta. Se invece d fosse dispari, la parità di S è la stessa di $a + bc + 1$ e una volta lanciati b e c , c'è un solo valore della parità di a che rende quest'espressione dispari, quindi in tutti i casi la probabilità sarà $\frac{1}{2}$. La probabilità quindi sarà $P(d \text{ dispari}) \cdot P(a \text{ ha la stessa parità di } bc) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ e quindi la risposta è $1 + 4 = 5$.

Soluzione 2. Costruiamo una tabella a seconda della parità di a, b, c, d per dedurre la parità di $S = ad + bcd + d^2$:

a	p	d	p	d	p	d	p	d	p	d	p	d	p	d	p	d
b	p	p	d	d	p	p	d	d	p	p	d	d	p	p	d	d
c	p	p	p	p	d	d	d	d	p	p	p	p	d	d	d	d
d	p	p	p	p	p	p	p	p	d	d	d	d	d	d	d	d
S	p	p	p	p	p	p	p	p	d	p	d	p	d	p	p	d

Chiamando p e d rispettivamente la probabilità che un numero sia pari o dispari otteniamo la probabilità totale

$$P = p^3d + 2p^2d^2 + d^4.$$

Usando che $p = d = \frac{1}{2}$ otteniamo $P = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, da cui la risposta è $1 + 4 = 5$.

2. Traduzioni di conto

Gaia Fuselli

Hermita è impegnata nella traduzione di un manoscritto per il corso di Antiche Rune. In esso i calcoli sono svolti in una base B ($B > 6$) nella quale il numero 61 è divisibile per 16. Quanto vale B ?

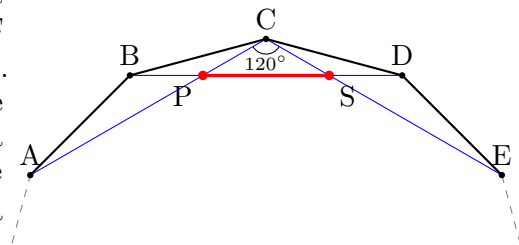
Soluzione. Scriviamo i numeri 61 e 16 in base B come $6B + 1$ e $B + 6$. La condizione di divisibilità si può tradurre come il fatto che $\frac{6B+1}{B+6}$ è un numero intero. Sottraendo ora 6 otteniamo che la divisibilità è equivalente al fatto che $-\frac{35}{B+6}$ sia un numero intero: stiamo chiedendo che $B + 6$ sia un divisore intero di 35, ma l'unico divisore che soddisfa anche la condizione $B > 6$ è 35 stesso e quindi $B = 35 - 6 = 29$.

3. Lezione di tattica

Leonardo Franchi

Il campo di Quamditch ha la forma di un dodecagono regolare. La capitana della squadra di *Rapportareo*, Katherine Johnson, vuole provare uno schema: detti A, B, C, D, E cinque vertici consecutivi del dodecagono, mette Henri Perelman nel punto P , intersezione delle rette AC e BD , e il suo gemello Smale nel punto S , intersezione delle rette BD e CE . Dice a Hardy, il Cercatore di Dimostrazioni della squadra, che P e C distano 1000 bacchette, e gli chiede di calcolare la distanza (in bacchette) tra Perelman e Smale. Hardy non sbaglia. Cosa risponde Hardy?

Soluzione. Notiamo che se prendiamo i vertici del dodecagono a due a due otteniamo un esagono regolare. In particolare AC e CE sono due lati consecutivi di un esagono regolare dunque $\widehat{ACE} = 120^\circ$. Inoltre, per ragioni di simmetria si ha $SC = PC$. In particolare SCP è un triangolo isoscele con angolo al vertice 120° : tracciandone l'altezza otteniamo quindi due triangoli rettangoli emiequilateri. In particolare $PS = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} CP = \sqrt{3} \cdot CP$ e dunque misura 1732,1 bacchette, da cui la risposta è 1732.



4. Passaggi segreti sola andata

Gaia Fuselli

Dalla Scuola Matematica Superiore, identificata dal numero 1, si dipanano 100 passaggi segreti (solo andata) per altrettante destinazioni, numerate con 0 e da 2 a 100. I gemelli Perelman le conoscono tutte e sanno che le destinazioni dalla 2 alla 9 sono abbastanza vicine alla scuola da permettere sempre di tornare indietro; la destinazione 0 è invece la temibile prigione di *Arctan*, da cui nessuno è mai uscito. Le altre mete seguono regole diverse: se il numero x della destinazione è primo o termina con zero, da essa non ci sono passaggi segreti verso altre destinazioni; altrimenti, detta u la cifra delle unità di x , dalla destinazione x c'è un passaggio verso la destinazione $x - 2u - 2$. Quante sono le destinazioni (scuola inclusa) dalle quali è possibile tornare a scuola, eventualmente usando più di un passaggio segreto?

Soluzione. Le destinazioni che vanno bene sono: quelle tra 1 e 9, quelle che finiscono per 2, 4 o 6, e la destinazione 15.

Notiamo infatti che la cifra delle unità dell'arrivo $x - 2u - 2$ da x dipende solo dalla cifra delle unità u di x . In particolare da posti che finiscono per 4 si finisce in posti che finiscono per 4, da posti che finiscono per 6 si finisce in posti che finiscono per 2 e viceversa, mentre da posti che finiscono per 8 si va a finire in multipli di 10 oppure in 0. Quindi dalle destinazioni che finiscono con 2, 4 e 6 si riesce sicuramente a tornare alla Scuola, mentre da quelle che finiscono per 8 e per 0 sicuramente no. Per quanto riguarda i dispari, si verifica a mano che da quelli tra 21 e 39 non si può raggiungere la scuola e se ho un dispari maggiore di 40, andando a ritroso troverò sempre numeri dispari e prima o poi finisco tra 21 e 39. Dunque da nessun dispari maggiore di 20 si può tornare indietro.

Riassumendo, tra i numeri maggiori di 20 le uniche destinazioni da cui si può raggiungere la scuola sono quelle che finiscono per 2, 4 o 6 (e sono 24), mentre tra 1 e 9 tutte le destinazioni vanno bene, e tra 10 e 19 ci sono esattamente 4 destinazioni che vanno bene, quindi in totale ne ho 37.

5. La prima della classe

Francesco Laganà

Hermita non si smentisce mai: è stata la prima a rispondere correttamente alla domanda posta dalla professoressa Vector, docente di Aritmanzia. Ella ha chiesto di usare le tavole numerologiche per calcolare

$$\left(\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{9}\right)^2\right) - \left(\frac{2}{9} - \left(\frac{2}{9}\right)^2\right) + \left(\frac{3}{9} - \left(\frac{3}{9}\right)^2\right) - \dots + \left(\frac{9}{9} - \left(\frac{9}{9}\right)^2\right) - \left(\frac{10}{9} - \left(\frac{10}{9}\right)^2\right).$$

Cosa ha risposto Hermita? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione. Notiamo che i termini sono del tipo $\frac{a}{9} - \left(\frac{a}{9}\right)^2 = \frac{9a - a^2}{9^2} = \frac{a(9-a)}{9^2}$, e in particolare i termini con $a = 1$ e $a = 8$ hanno lo stesso valore, come anche quelli con $a = 2$ e $a = 7$ e così via: inoltre essi hanno sempre segno diverso. Ciò vuol dire che tutti gli addendi, a parte gli ultimi due, si elidono a due a due. Considerando che il penultimo termine è nullo, rimane solo l'ultimo termine, che è $-\frac{10(9-10)}{81} = \frac{10}{81}$ per cui la risposta è 91.

6. Punizioni che contano

Giuseppe Mascellani

Anche questa volta Ron deve scontare la punizione inflitta dalla prof.ssa Dolores Unboundrige. Ron prende pazientemente il suo quaderno di pergamene quadrettate e inizia a disegnare su ogni pergamena un quadrato diverso. Il quadrato Q_1 ha lato 1 quadretto, il quadrato Q_2 ha lato 2, e così via fino a Q_{11} , che ha lato 11. Quindi riparte dalla prima pergamena e nel quadrato Q_1 Ron scrive 11; nei quattro quadratini di Q_2 scrive 10; in ogni quadratino 1×1 contenuto in Q_3 scrive il numero 9; e così via fino a scrivere 1 in tutti i quadratini di Q_{11} . La perfida prof.ssa Unboundrige sarà soddisfatta solo quando Ron le dirà la somma di tutti i numeri scritti nei quadratini. Quale numero permette a Ron di scontare la sua pena?

Soluzione. La somma cercata è $S = 11 \cdot 1^2 + 10 \cdot 2^2 + 9 \cdot 3^2 + 8 \cdot 4^2 + \dots + 1 \cdot 11^2$. Per meglio considerare questa somma, scriviamo che $11 = 12 - 1$, $10 = 12 - 2$, \dots , $1 = 12 - 11$ per cui troviamo

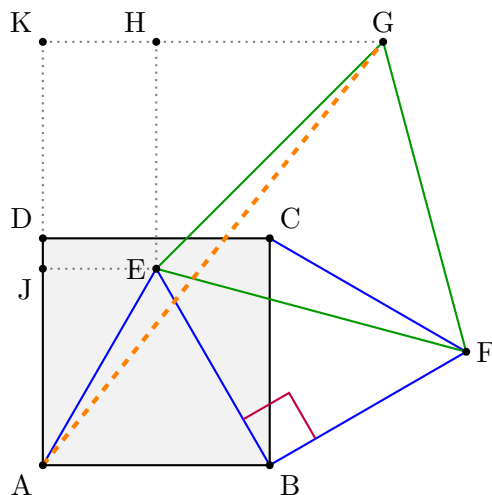
$$\begin{aligned} S &= (12 - 1) \cdot 1^2 + (12 - 2) \cdot 2^2 + (12 - 3) \cdot 3^2 + \dots + (12 - 11) \cdot 11^2 \\ &= 12 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + 11^2) - (1^3 + 2^3 + \dots + 11^3). \end{aligned}$$

Usando ora che la somma dei primi n quadrati è $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e che la somma dei primi n cubi è $(\frac{n(n+1)}{2})^2$ troviamo $S = 12 \cdot \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} - (\frac{11 \cdot 12}{2})^2 = 12 \cdot 11 \cdot (2 \cdot 23 - 11 \cdot 3) = 12 \cdot 11 \cdot 13 = 1716$

7. Il quadrato decorato

Pietro Scaglioni

Svolgendo il compito di Geomanzia, Hardy disegna un quadrato $ABCD$ di lato 10 millibacchette; Ron costruisce due triangoli equilateri: ABE interno al quadrato e BCF esterno al quadrato. Hermita completa la configurazione aggiungendo il triangolo equilatero EFG con G dalla parte opposta di B rispetto a EF . L'incantesimo si attiverà declamando quanto vale AG^2 (in millibacchette quadre). Cosa devono dire i tre amici?



Soluzione 1. Notiamo innanzitutto che EBF è un triangolo rettangolo isoscele in quanto $EB = AB = BC = BF$ e $\widehat{EBF} = \widehat{EBC} + \widehat{CBF} = (90^\circ - 60^\circ) + 60^\circ = 90^\circ$. Quindi $EF = 10\sqrt{2}$. Tracciando ora anche da E e G rispettivamente la parallela e la perpendicolare al lato CD otteniamo un triangolo rettangolo (in H), dove l'angolo $\widehat{HEG} = 45^\circ$: allora si ha $HE = HG = 10$. Sia K l'intersezione tra i prolungamenti di GH e AD . Consideriamo ora il triangolo rettangolo AGK , i cui cateti misurano $KG = 5 + 10$ e $AK = 5\sqrt{3} + 10$. Quindi la quantità richiesta è

$$AG^2 = 15^2 + (5\sqrt{3} + 10)^2 = 400 + 100\sqrt{3} = 573, \dots$$

Soluzione 2. Come prima arriviamo a $GE = EF = 10\sqrt{2}$ e ora troviamo che $\widehat{AEG} = 165^\circ$. Considerando il triangolo AEG possiamo applicare il teorema di Carnot: $AG^2 = 100 + 200 + 200\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) = 400 + 100\sqrt{3}$.

Soluzione 3. Consideriamo un piano complesso dove $A = 0$, $B = 10$, $C = 10 + 10i$ e $D = 10i$. Allora, detta $\omega = e^{i\pi/3}$ la radice sesta dell'unità del primo quadrante, notiamo che $1 - \omega = \omega^{-1}$. Si ha $E = B\omega$ e $F = C + \omega(B - C) = \omega B + \omega^{-1}C$. Infine troviamo $G = \omega F + \omega^{-1}E = B + \omega^2 B + C$. Ora usiamo che $C = (1 + i)B$ e troviamo

$$|G|^2 = |(1 + \omega^2 + 1 + i)B|^2 = |2 + \omega^2 + i|^2 \cdot 100.$$

Poiché $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ si trova $\omega^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e quindi $|2 + \omega^2 + i|^2 = |\frac{3}{2} + i(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})|^2 = 4 + \sqrt{3}$. Concludiamo che $|G|^2 = 400 + 100\sqrt{3}$.

8. Prova di lealtà

Giuseppe Mascellani

Il matemago più cattivo di sempre, *Colui-che-non-può-essere-dimostrato*, testa la lealtà dei suoi seguaci proponendo il seguente quesito. Dato un intero positivo a , definisce $K_0 = 1$ e, per ogni $n \geq 0$, $K_{n+1} = K_n + aK_{n-1} + \dots + a^n K_0$. Chiede poi di determinare la somma di tutti gli interi positivi n per cui è possibile che $K_n = 729$. Cosa devono rispondere i seguaci, per aver salva la vita?

Soluzione. Facendo i primi casi troviamo che $K_1 = 1$, $K_2 = 1 + a$, $K_3 = (1 + a) + a + a^2 = 1 + 2a + a^2 = (1 + a)^2$, quindi possiamo congetturare che $K_n = (1 + a)^{n-1}$ per $n \geq 1$. Rimandiamo la dimostrazione di questo fatto a dopo. Per concludere l'esercizio è ora sufficiente trovare gli n per cui esiste a tale che $(1 + a)^{n-1} = 729 = 3^6$. Questo può accadere solo quando $n - 1 | 6$ e quindi $n - 1 \in \{1, 2, 3, 6\}$ per cui la somma voluta è $2 + 3 + 4 + 7 = 16$.

Per dimostrare la formula per K_n si può guardare a $K_{n+2} = K_{n+1} + aK_n + a^2K_{n-1} + \dots + a^{n+1}K_0$. Possiamo raccogliere il fattore a da tutti gli addendi al secondo membro a parte il primo, ottenendo

$$K_{n+2} = K_{n+1} + a(K_n + aK_{n-1} + \dots + a^n K_0).$$

Nell'espressione tra parentesi riconosciamo la definizione di K_{n+1} , dunque $K_{n+2} = K_{n+1} + aK_{n+1} = (1 + a)K_{n+1}$. Quindi K_n è una progressione geometrica di ragione $(1 + a)$, come volevamo dimostrare.

9. Magic-force-4

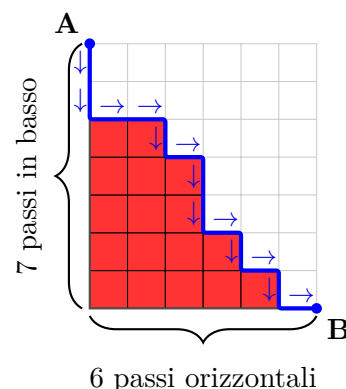
Angelo Giustiniani

Ron sta aspettando il suo amico Hardy per sfidarlo in una partita a *magic-force-4*, un gioco che si fa con gettoni da inserire in una griglia verticale fatta da 6 colonne, in ogni colonna si possono infilare al massimo 7 gettoni uno sopra l'altro. Nell'attesa Ron lascia cadere il primo gettone nella prima colonna a sinistra e questo va ad occupare il posto in basso a sinistra. Quando mette un nuovo gettone, se nel posto alla sinistra del gettone appena inserito c'è già un gettone, allora la mossa è valida. Un'altra mossa valida è inserire un nuovo gettone nella prima colonna a sinistra. Ron può fermarsi quando vuole. Quante sono le configurazioni che Ron può ottenere facendo solo mosse valide (ricordando che ha già messo un gettone)?

Soluzione 1. Le configurazioni che può ottenere Ron sono quelle che in ogni colonna hanno almeno tanti gettoni quanti la colonna alla sua destra. Immaginiamo ora di aggiungere un gettone nell'ultima colonna, due gettoni nella penultima colonna e così via, fino ad aggiungere 6 gettoni alla prima colonna: in questo modo abbiamo una configurazione dove il numero di gettoni in ogni colonna è strettamente di più della colonna alla sua destra, e la

prima colonna ha al più 13 gettoni. Queste configurazioni sono facili da contare perché corrispondono ai sottoinsiemi di 6 elementi di $\{1, 2, 3, \dots, 13\}$: per ogni sottoinsieme infatti possiamo prendere i suoi elementi in ordine decrescente e questi saranno le numerosità delle colonne, e viceversa. Dunque le configurazioni ottenibili sono $\binom{13}{6} - 1 = 1715$, dove abbiamo escluso la configurazione vuota.

Soluzione 2. Le configurazioni che può ottenere Ron sono quelle che in ogni colonna hanno almeno tanti gettoni quanti la colonna alla sua destra. Immaginiamo ora di avere una scacchiera con 7×6 caselle e per ogni configurazione coloriamo di rosso le caselle corrispondenti ai gettoni presenti, e consideriamo il perimetro interno della zona rossa così costruita, completato con il lato di sinistra e quello in basso, così come in figura. Notiamo che questo percorso dal punto *A* al punto *B* compie per forza solo passi in basso (7) e passi a sinistra (6); inoltre per ogni percorso così fatto, è identificata una zona rossa (le caselle che rimangono sotto il percorso) che rappresenta una configurazione ottenibile. Basta dunque contare i percorsi che sono gli anagrammi di $\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$, cioè $\frac{(6+7)!}{6!7!} - 1 = 1715$, dove abbiamo escluso la configurazione vuota: nell'esempio in figura la permutazione è $\downarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow$.

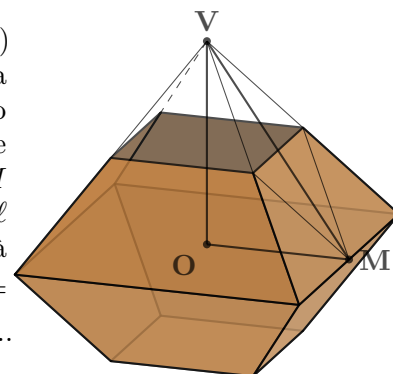


10. Coppa delle Case

Luca Lamanna

Ron è talmente emozionato per l'assegnazione della Coppa delle Case che vuole costruirne una replica di cartone. Comincia ritagliando lo sviluppo piano della coppa: un quadrato di lato 9 cm su ciascuno dei cui lati è costruito un esagono regolare, esterno al quadrato. Ron poi l'assembla, facendo combaciare i lati di esagoni che hanno in comune un vertice e piegando poi gli esagoni verso l'interno, lungo la diagonale maggiore parallela ai lati del quadrato. In questo modo la coppa, che ha un foro quadrato in cima, è pronta. Qual è il suo volume (in cm^3)?

Soluzione. Notiamo che le diagonali maggiori degli esagoni (dove pieghiamo) formano un quadrato di lato 2ℓ dove ℓ è il lato di base, e che la parte sopra del solido è uguale alla parte sotto ma ribaltata. Ci concentriamo sul tronco di piramide superiore. Completiamo il tronco di piramide ad una piramide come in figura; considerando una faccia laterale, per Talete la sua altezza VM sarà il doppio dell'apotema dell'esagono, e quindi sarà $\sqrt{3}\ell$. Invece $OM = \ell$ e l'altezza della piramide è $VO = \sqrt{VM^2 - OM^2} = \sqrt{2}\ell$. Il suo volume sarà $V_P = \frac{1}{3}(2\ell)^2 \cdot \sqrt{2}\ell = \frac{4\sqrt{2}}{3}\ell^3$; ma allora il volume del tronco di piramide sarà $V_T = V_P - \frac{1}{8}V_P = \frac{7\sqrt{2}}{6}\ell^3$. Il volume totale è dunque $2V_T = \frac{7\sqrt{2}}{3}\ell^3 = 1701\sqrt{2} = 2405,6\dots$



11. Stanza delle Condizioni Necessarie

Gaia Fuselli

Nella Stanza delle Condizioni Necessarie c'è tutto ciò che serve a un matemago. Luna Lovegödel stava cercando gli interi n compresi tra -256 e 256 , estremi inclusi, che si possano scrivere come differenza tra la somma di due quadrati e la somma di altri due quadrati (quadrati di opportuni numeri interi, anche uguali). Quanti diversi numeri n ha trovato Luna?

Soluzione. Luna sta cercando tutti gli interi della forma $n = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$. Notiamo che prendendo $(a, b, c, d) = (k + 1, 0, k, 0)$ si ha $n = 2k + 1$, quindi al variare di k otteniamo tutti i dispari, mentre prendendo $(a, b, c, d) = (k + 1, 0, k, 1)$ si ha $n = 2k$ quindi otteniamo tutti i pari. Quindi possiamo ottenere tutti i numeri interi. La risposta è allora $2 \cdot 256 + 1 = 513$.

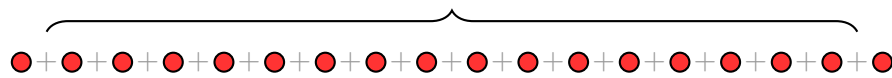
12. Sfida sugli scudi

Eugenio Trovarelli

È il giorno dell'attesa sfida di Quamditch tra la squadra di *Rapportatore* e quella di *Perognesiste*, capitanata da Cedric Villany. Hardy nota che in fondo al campo di gara sono appesi 18 scudi in fila, ciascuno dipinto con il colore di una delle due case (rosso o giallo), e che il numero di scudi gialli è strettamente maggiore del numero di scudi rossi. Prima di salire sulla sua scopa, Hardy, un po' nervoso, osserva di sfuggita che, tra tutte le coppie di scudi adiacenti, esattamente 13 sono formate da scudi dello stesso colore. Quante sono le possibili colorazioni degli scudi?

Soluzione. Il fatto che ci siano 13 coppie di scudi adiacenti che hanno lo stesso colore impone che ce ne sia esattamente 4 che hanno scudi di colore diverso. Quindi ci sono 5 sequenze contigue di scudi A, B, C, D, E a colori alterni, e ognuna di queste sequenze è non vuota. Dette a, b, c, d, e le loro numerosità abbiamo che $a + b + c + d + e = 18$. Il modo di scegliere queste numerosità è $\binom{17}{4}$ e lo possiamo vedere in questo modo: consideriamo 18 palline e immaginiamo di mettere 4 segni $+$ nei 17 spazi tra di loro. Questa cosa si può fare esattamente in $\binom{17}{4}$ modi perché dobbiamo scegliere un sottoinsieme di 4 elementi in uno di 17.

i 17 spazi vuoti in cui inserire i 4 segni "+"



$$\text{3+4+5+2+4} = 18$$

$$\text{1+3+2+8+4} = 18$$

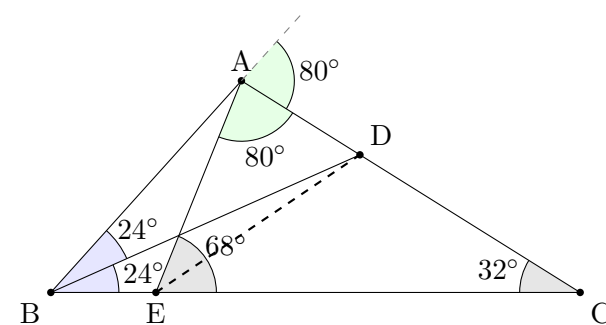
$$\text{5+1+1+2+9} = 18$$

Ogni scelta di dove mettiamo i "+" porta ad una diversa suddivisione di 18 in 5 addendi positivi (vedi figura). Una volta scelta la numerosità delle sequenze contigue di scudi, c'è un solo modo di assegnare i colori che renda vero che il numero di scudi gialli è strettamente maggiore del numero di scudi rossi, a meno che $a + c + e = b + d = 9$. Similmente possiamo contare quante volte questa cosa può succedere, e sarà in $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{2}$ modi. Quindi la risposta finale è $\binom{17}{4} - \binom{8}{2} \cdot \binom{8}{2} = 2156$.

13. Pianta del pub [★]

Leonardo Franchi

La sala del pub *Tre manici topologici* ha la pianta a forma di triangolo ABC con angoli $\hat{A} = 100^\circ$, $\hat{B} = 48^\circ$, $\hat{C} = 32^\circ$. Il bancone è posto nel punto E su BC tale che $\widehat{AEB} = 112^\circ$. Detto D il punto di AC che è piede della bisettrice da B , la barista sa che può sorvegliare l'ingresso dall'angolo \widehat{AED} . Qual è l'ampiezza di quest'ultimo (in gradi)?



Soluzione. L'angolo esterno ad A nel triangolo BAE è $160^\circ = 48^\circ + 112^\circ$. Invece l'angolo esterno in A nel triangolo ABC è $80^\circ = 48^\circ + 32^\circ$. In particolare AC risulta essere bisettrice esterna in A nel triangolo ABE . Ma allora D è punto di incontro di una bisettrice esterna e una interna, e appartiene dunque alla rimanente bisettrice esterna, cioè ED è bisettrice di $\widehat{AEC} = 68^\circ$. Dunque $\widehat{AED} = 34^\circ$.

14. Mandragore preziose

Alessandro Lombardo

Pomona Springer, docente di Erbolgia, cura in una serra segreta le sue preziose 2025 mandragore, inizialmente tutte alte 10^9 nanobacchette (nb), cioè una bacchetta. Ogni giorno annaffia esattamente 101 mandragore distinte. A fine giornata le mandragore che quel giorno sono state annaffiate crescono di 1 nb , mentre le altre si riducono di 1 nb . Un giorno, prima di innaffiare le mandragore, la prof. Springer decide di ordinare i vasi delle mandragore mettendoli in ordine dalla più bassa alla più alta. Nel compiere questa azione si accorge che le piante hanno tutte altezze diverse e che la differenza di altezza tra due piante consecutive rimane costante. Quanti giorni sono trascorsi, come minimo, da quel dì in cui ella iniziò a prendersi cura delle mandragore?

Soluzione. Se sono passati d giorni e una mandragora è stata annaffiata k volte, la sua altezza è $10^9 - d + 2k$. Quindi, perché le altezze siano tutte diverse e in progressione aritmetica, anche i numeri di annaffiature devono essere 2025 termini distinti di una progressione aritmetica, diciamo

$$a, a + r, a + 2r, \dots, a + (2025 - 1)r$$

con $r \geq 1$. Inoltre la somma di tutti questi numeri è $101d$. Otteniamo

$$2025(a + 1012r) = 101d.$$

Bisogna minimizzare $a + 1012r$, che deve essere multiplo di 101: il minimo si ha con $r = 1$ e $a = 99$, quindi $a + 1012r = 1111$. Allora $d = 2025 \cdot 11 = 22275$, e si risponde con le ultime quattro cifre, cioè 2275. Si può verificare che questi numeri di annaffiature sono effettivamente realizzabili con giornate da 101 mandragore distinte.

15. Password radicale [★]

Denis Tusca

Hardy, per comunicare in segreto con il suo padrino Sirius Schwarz, ha convenuto di mettere una password agli specchi gemelli. Preso $p_0(x) = x$ e $p_{n+1}(x) = 1 - p_n(x)^2$ per ogni n naturale, la password è il numero di radici reali, contate con molteplicità, del polinomio $p_{20}(x)$. Qual è la password?

Soluzione. Innanzitutto troviamo che

$$p_{n+2}(x) = 1 - p_{n+1}(x)^2 = 1 - (1 - p_n(x)^2)^2 = p_n(x)^2(2 - p_n(x)^2) = p_n(x)^2(1 + p_{n+1}(x)).$$

Quindi, dette Z_n le radici reali contate con molteplicità di $p_n(x)$ si ha che $Z_{n+2} = 2Z_n + A_{n+1}$ dove A_n è il numero di radici reali contate con molteplicità di $p_n(x) + 1$. Supponiamo che $A_n = 2$ (dimostreremo che è vero per $n \geq 1$ in un secondo momento): allora $Z_{n+2} = 2Z_n + 2$ e avendo $Z_0 = 1$, per induzione si ha $Z_{2k} = 3 \cdot 2^k - 2$ e quindi $Z_{20} = 3 \cdot 2^{10} - 2 = 3070$.

Per induzione ora mostriamo che per $n \geq 1$, il polinomio $p_n(x) + a$ per ogni $a > 0$ ha sempre esattamente 2 radici reali. Infatti per $n = 1$ si ha $p_1(x) = 1 - x^2$ e $x^2 = 1 + a$ ha esattamente 2 radici reali. Per $n \geq 1$ si ha

$$p_{n+1}(x) + a = 1 + a - p_n(x)^2 = (\sqrt{1+a} - p_n(x))(\sqrt{1+a} + p_n(x)),$$

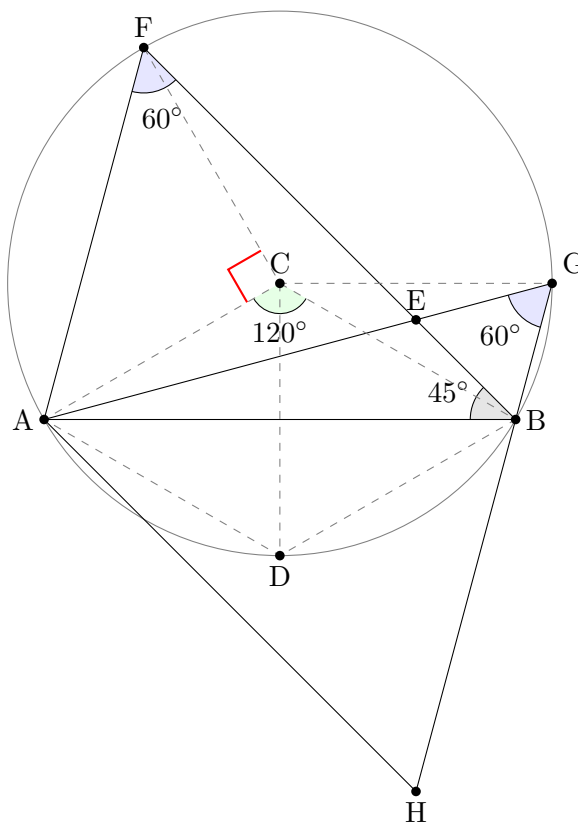
però il primo fattore non può avere radici reali in quanto per $n \geq 1$ si ha $p_n(x) \leq 1$ mentre il secondo fattore ha esattamente 2 radici per ipotesi induttiva.

16. Partita di Quamditch

Guido Lido

Nel campo di Quamditch sono poste due ceste in C e D e poi due arbitri in A e B , in maniera che ACD e BCD siano equilateri ma non coincidenti. La squadra di *Rapportareo* (composta da Hardy, Hermita, Ron e Norris) deve segnare in C . Tuttavia per segnare un punto regolare il tiratore deve avere un giocatore pivot tale che essi siano allineati con B , che formino un triangolo equilatero con A e il tiratore sia più vicino alla cesta C del pivot. Hardy e Hermita (posti in E ed G) sono pronti a segnare come tiratori, avendo come pivot rispettivamente Ron e Norris (posti in F ed H). Sappiamo inoltre che $\widehat{ABE} = 45^\circ$ e che $\widehat{ABH} = 75^\circ$, e E e G sono dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB . Sapendo che EF misura 300 bacchette, determinare $GC + FC$ (in bacchette).

Soluzione. Innanzitutto notiamo che H e G saranno da due parti opposte rispetto ad AB e per soddisfare la condizione che Hermita è più vicina a C rispetto a Norris, avremo che G sta dalla stessa parte di C rispetto ad AB . Quindi anche E ed F si troveranno dalla stessa parte di C rispetto ad AB e dunque la configurazione risulta essere quella in figura. Osserviamo ora che, poiché $\widehat{AFB} = \widehat{AGB} = 60^\circ$, A, F, G, B risultano stare sulla stessa circonferenza Γ ; inoltre ACB è isoscele di base AB e $\widehat{ACB} = 120^\circ = 2 \cdot 60^\circ$ e quindi per il teorema inverso di angoli al centro - angoli alla circonferenza, si ha che C è il centro di Γ e il suo raggio R è $CF = CA = CB = CG$. Ma allora $\widehat{FCA} = 2 \cdot \widehat{FBA} = 90^\circ$: FAC è dunque un triangolo rettangolo isoscele di base FA e quindi $R = FC = FA/\sqrt{2} = EF/\sqrt{2}$. Possiamo concludere che $GC + FC = 2R = \sqrt{2}EF = 300\sqrt{2} = 424, \dots$





XXVII Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 1 – Venerdì 8 Maggio 2026



*Ministero dell'Istruzione
e del Merito*

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Alla Scuola Matematica Superiore	0005
2	Traduzioni di conto	0029
3	Lezione di tattica	1732
4	Passaggi segreti sola andata	0037
5	La prima della classe	0091
6	Punizioni che contano	1716
7	Il quadrato decorato	0573
8	Prova di lealtà	0016
9	Magic-force-4	1715
10	Coppa delle Case	2405
11	Stanza delle Condizioni Necessarie	0513
12	Sfida sugli scudi	2156
13	Pianta del pub [★]	0034
14	Mandragore preziose	2275
15	Password radicale [★]	3070
16	Partita di Quamditch	0424