XXVII Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Venerdì 8 Maggio 2026

Unione Matematica Italiana

Ministero dell'Istruzione e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- I problemi più impegnativi (a nostro giudizio) sono contrassegnati da una stella [$\star$].
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2}=1.4142 \qquad \sqrt{3}=1.7321 \qquad \sqrt{5}=2.2361 \qquad \sqrt{7}=2.6458 \qquad \pi=3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **90 minuti dall'inizio**: termine della gara.

1. Divisibilità rivelatoria

Gaia Fuselli

Hermita è impegnata nella traduzione di un manoscritto per il corso di Antiche Rune. In esso i calcoli sono svolti in una base B ($B>4$) nella quale il numero 41 è divisibile per 14. Quanto vale B?

Soluzione. Scriviamo i numeri 41 e 14 in base B come $4B+1$ e $B+4$. La condizione di divisibilità si può tradurre come il fatto che $\frac{4B+1}{B+4}$ è un numero intero. Sottraendo ora 4 otteniamo che la divisibilità è equivalente al fatto che $-\frac{15}{B+4}$ sia un numero intero: stiamo chiedendo che $B+4$ sia un divisore intero di 15, ma l'unico divisore che soddisfa anche la condizione $B>4$ è 15 stesso e quindi $B=15-4=11$.

2. Divinazione

Gaia Fuselli

La docente di Divinazione della Scuola Matemagica Superiore, Sibilla Riemann, prende 3 carte magiche: $1,2,3$, le mescola e chiede a Hermita di estrarre una carta a caso, e scriversi il valore a che ha estratto, rimescola le carte e chiede di estrarre nuovamente, segnandosi il numero estratto b, ripete quindi la procedura anche per trovare i numeri c e d. Mentre Hermita estrae, chiede agli altri studenti di prevedere il numero $ab+bcd+d^2$. Qual è la probabilità che il numero da prevedere sia dispari? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione. Costruiamo una tabella a seconda della parità di a,b,c,d per dedurre la parità di $S=ab+bcd+d^2$:

a	p	d	p	d	p	d	p	d	p	d	p	d	p	d	p	d
b	p	p	d	d	p	p	d	d	p	p	d	d	p	p	d	d
c	p	p	p	p	d	d	d	d	p	p	p	p	d	d	d	d
d	p	p	p	p	p	p	p	p	d	d	d	d	d	d	d	d
S	p	p	p	**d**	p	p	p	**d**	**d**	**d**	**d**	p	**d**	**d**	p	**d**

Chiamando p e d rispettivamente la probabilità che un numero sia pari o dispari otteniamo la probabilità totale

$$P=p^3d+4p^2d^2+2pd^3+d^4.$$

Usando che $p=\frac{1}{3}, d=\frac{2}{3}$ otteniamo $P=\frac{2+16+16+16}{81}=\frac{50}{81}$, da cui la risposta è $50+81=131$.

3. Somme aritmantiche

Francesco Laganà

Hermita non si smentisce mai: è stata la prima a rispondere correttamente alla domanda posta dalla professoressa Vector, docente di Aritmanzia. Ella ha chiesto di usare le tavole numerologiche per calcolare

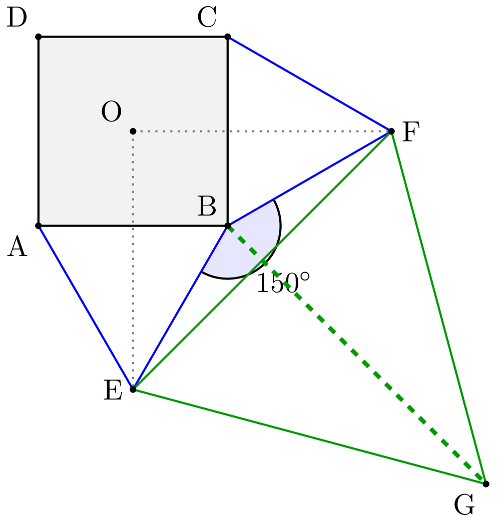
$$\left(\frac{1}{11}-\left(\frac{1}{11}\right)^2\right)-\left(\frac{2}{11}-\left(\frac{2}{11}\right)^2\right)+\left(\frac{3}{11}-\left(\frac{3}{11}\right)^2\right)-\cdots+\left(\frac{11}{11}-\left(\frac{11}{11}\right)^2\right)-\left(\frac{12}{11}-\left(\frac{12}{11}\right)^2\right).$$

Cosa ha risposto Hermita? *Rispondere con la somma di numeratore e denominatore della frazione ridotta ai minimi termini.*

Soluzione. Notiamo che i termini sono del tipo $\frac{a}{11}-(\frac{a}{11})^2=\frac{11a-a^2}{11^2}=\frac{a(11-a)}{11^2}$, e in particolare i termini con $a=1$ e $a=10$ hanno lo stesso valore, come anche quelli con $a=2$ e $a=9$ e così via: inoltre essi hanno sempre segno diverso. Ciò vuol dire che tutti gli addendi, a parte gli ultimi due, si elidono a due a due. Considerando che il penultimo termine è nullo, rimane solo l'ultimo termine, che è $-\frac{12(11-12)}{121}=\frac{12}{121}$ per cui la risposta è 133.

4. L'incantesimo di Geomanzia — ***Pietro Scaglioni***

Svolgendo il compito di Geomanzia, Hardy disegna un quadrato $ABCD$ di lato 10 *milli*bacchette; Ron costruisce due triangoli equilateri ABE e BCF esterni al quadrato. Hermita completa la configurazione aggiungendo il triangolo equilatero EFG con G dalla parte opposta di B rispetto a EF. L'incantesimo si attiverà declamando quanto vale BG^2 (in *milli*bacchette quadre). Cosa devono dire i tre amici?



Soluzione 1. Notiamo che $\widehat{EBF} = 360° - 90° - 60° - 60° = 150°$. Considerando ora il triangolo EGF, esso è isoscele di base EF e l'angolo concavo $\widehat{EGF} = 300° = 2 \cdot 150°$. Ma allora possiamo concludere che B è sulla circonferenza di centro G che passa per E ed F, dunque $BG = EG = EF$. Tracciando ora da E ed F le perpendicolari rispettivamente ai lati AB e BC, esse si incontrano in O. Per costruzione OEF è rettangolo in O e inoltre per simmetria si ha $OE = OF$. Ma allora $EF = \sqrt{2}OE$. Ma a questo punto è facile calcolare OE poiché, detto M il punto medio di AB, si ha $OE = OM + ME = 5 + 5\sqrt{3}$. Quindi

$$BG^2 = EF^2 = 2 \cdot OE^2 = 2 \cdot 25 \cdot (1+\sqrt{3})^2 = 200 + 100\sqrt{3} = 373,...$$

Soluzione 2. Si traccino da E ed F le perpendicolari rispettivamente ai lati AB e BC, esse si incontrano in O. Consideriamo un sistema cartesiano con O come origine e OF ed OE come assi. Allora $B = (5, -5)$, $E = (0, -5-5\sqrt{3})$ mentre $F = (5+5\sqrt{3}, 0)$; in particolare $EF = 5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}$. Consideriamo il punto medio N tra E ed F. Si ha $N = (\frac{5+5\sqrt{3}}{2}, -\frac{5+5\sqrt{3}}{2})$. Ovviamente B, N e G risultano allineati in quest'ordine sulla bisettrice del secondo e terzo quadrante e allora

$$BG = BN + NG = \sqrt{2}(x_N - x_B) + \frac{\sqrt{3}}{2}EF = \sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{3}-5}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (5\sqrt{2} + 5\sqrt{6}) = 5\sqrt{6} + 5\sqrt{2},$$

quindi $BG^2 = 200 + 100\sqrt{3}$.

Soluzione 3. Consideriamo un piano complesso dove $A = 0$, $B = 10$, $C = 10 + 10i$ e $D = 10i$. Allora, detta $\omega = e^{i\pi/3}$ la radice sesta dell'unità del primo quadrante, notiamo che $1 - \omega = \omega^{-1}$. Si ha $E = B\omega^{-1}$ e $F = C + \omega(B - C) = \omega B + \omega^{-1}C$. Infine troviamo $G = \omega^{-1}F + \omega E = 2B + \omega^{-2}C$. Ora usiamo che $C = (1+i)B$ e troviamo

$$|G - B|^2 = |(1 + \omega^{-2}(1+i))|^2 \cdot |B|^2 = |\omega^2 + 1 + i|^2 \cdot 100.$$

Poiché $\omega = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ si trova $\omega^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e quindi $|\omega^2 + 1 + i|^2 = |\frac{1}{2} + i(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})|^2 = 2 + \sqrt{3}$. Concludiamo che $|G - B|^2 = 200 + 100\sqrt{3}$.

5. Destinazioni senza ritorno — ***Gaia Fuselli***

Dalla Scuola Matemagica Superiore, identificata dal numero 1, si dipanano 110 passaggi segreti (solo andata) per altrettante destinazioni, numerate con 0 e da 2 a 110. I gemelli Perelman le conoscono tutte e sanno che le destinazioni dalla 2 alla 9 sono abbastanza vicine alla scuola da permettere sempre di tornare indietro; la destinazione 0 è invece la temibile prigione di *Arctan*, da cui nessuno è mai uscito. Le altre mete seguono regole diverse: se il numero x della destinazione è primo o termina con zero, da essa non ci sono passaggi segreti verso altre destinazioni; altrimenti, detta u la cifra delle unità di x, dalla destinazione x c'è un passaggio verso la destinazione $x - 2u - 2$. Quante sono le destinazioni (scuola inclusa) dalle quali è possibile tornare a scuola, eventualmente usando più di un passaggio segreto?

Soluzione. Le destinazioni che vanno bene sono: quelle tra 1 e 9, quelle che finiscono per 2, 4 o 6, e la destinazione 15.

Notiamo infatti che la cifra delle unità dell'arrivo $x - 2u - 2$ da x dipende solo dalla cifra delle unità u di x. In particolare da posti che finiscono per 4 si finisce in posti che finiscono per 4, da posti che finiscono per 6 si finisce in posti che finiscono per 2 e viceversa, mentre da posti che finiscono per 8 si va a finire in multipli di 10 oppure in 0. Quindi dalle destinazioni che finiscono con 2, 4 e 6 si riesce sicuramente a tornare alla Scuola, mentre da quelle che finiscono per 8 e per 0 sicuramente no. Per quanto riguarda i dispari, si verifica a mano che da quelli tra 21 e 39 non si può raggiungere la scuola e se ho un dispari maggiore di 40, andando a ritroso troverò sempre numeri dispari e prima o poi finisco tra 21 e 39. Dunque da nessun dispari maggiore di 20 si può tornare indietro.

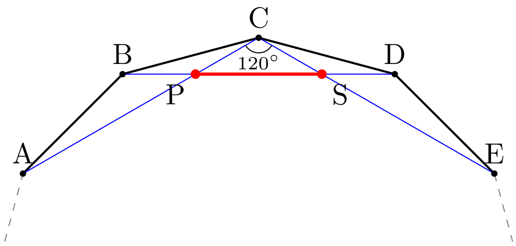
Riassumendo, tra i numeri maggiori di 20 le uniche destinazioni da cui si può raggiungere la scuola sono quelle che finiscono per 2, 4 o 6 (e sono 27), mentre tra 1 e 9 tutte le destinazioni vanno bene, e tra 10 e 19 ci sono esattamente 4 destinazioni che vanno bene, quindi in totale ne ho 40.

6. Schema di Quamditch — ***Leonardo Franchi***

Il campo di Quamditch ha la forma di un dodecagono regolare. La capitana della squadra di *Rapportaureo*, Katherine

Johnson, vuole provare uno schema: detti A, B, C, D, E cinque vertici consecutivi del dodecagono, mette Henri Perelman nel punto P, intersezione delle rette AC e BD, e il suo gemello Smale nel punto S, intersezione delle rette BD e CE. Dice a Hardy, il Cercatore di Dimostrazioni della squadra, che P e C distano 200 bacchette, e gli chiede di calcolare la distanza (in bacchette) tra Perelman e Smale. Hardy non sbaglia. Cosa risponde Hardy?

Soluzione. Notiamo che se prendiamo i vertici del dodecagono a due a due otteniamo un esagono regolare. In particolare AC e CE sono due lati consecutivi di un esagono regolare dunque $\widehat{ACE} = 120°$. Inoltre, per ragioni di simmetria si ha $SC = PC$. In particolare SCP è un triangolo isoscele con angolo al vertice $120°$: tracciandone l'altezza otteniamo quindi due triangoli rettangoli emiequilateri. In particolare $PS = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} CP = \sqrt{3} \cdot CP$ e dunque misura $346{,}42$ bacchette, da cui la risposta è 346.



7. Mettere le radici [⋆] — ***Denis Tusca***

Hardy, per comunicare in segreto con il suo padrino Sirius Schwarz, ha convenuto di mettere una password agli specchi gemelli. Preso $p_0(x) = x$ e $p_{n+1}(x) = 1 - p_n(x)^2$ per ogni n naturale, la password è il numero di radici reali, contate con molteplicità, del polinomio $p_{22}(x)$. Qual è la password?

Soluzione. Innanzitutto troviamo che

$$p_{n+2}(x) = 1 - p_{n+1}(x)^2 = 1 - (1 - p_n(x)^2)^2 = p_n(x)^2(2 - p_n(x)^2) = p_n(x)^2(1 + p_{n+1}(x)).$$

Quindi, dette Z_n le radici reali contate con molteplicità di $p_n(x)$ si ha che $Z_{n+2} = 2Z_n + A_{n+1}$ dove A_n è il numero di radici reali contate con molteplicità di $p_n(x) + 1$. Supponiamo che $A_n = 2$ (dimostreremo che è vero per $n \geq 1$ in un secondo momento): allora $Z_{n+2} = 2Z_n + 2$ e avendo $Z_0 = 1$, per induzione si ha $Z_{2k} = 3 \cdot 2^k - 2$ e quindi $Z_{22} = 3 \cdot 2^{11} - 2 = 6142$.

Per induzione ora mostriamo che per $n \geq 1$, il polinomio $p_n(x) + a$ per ogni $a > 0$ ha sempre esattamente 2 radici reali. Infatti per $n = 1$ si ha $p_1(x) = 1 - x^2$ e $x^2 = 1 + a$ ha esattamente 2 radici reali. Per $n \geq 1$ si ha

$$p_{n+1}(x) + a = 1 + a - p_n(x)^2 = (\sqrt{1+a} - p_n(x))(\sqrt{1+a} + p_n(x)),$$

però il primo fattore non può avere radici reali in quanto per $n \geq 1$ si ha $p_n(x) \leq 1$ mentre il secondo fattore ha esattamente 2 radici per ipotesi induttiva.

8. Un quadrato dopo l'altro — ***Giuseppe Mascellani***

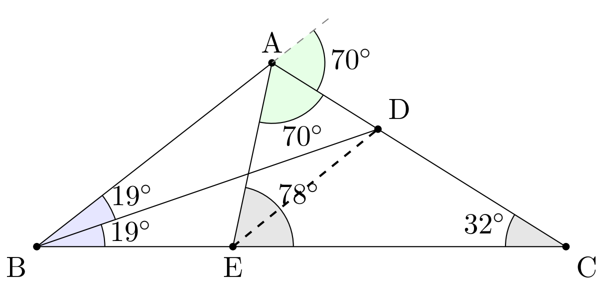
Anche questa volta Ron deve scontare la punizione inflitta dalla prof.ssa Dolores Unboundrige. Ron prende pazientemente il suo quaderno di pergamene quadrettate e inizia a disegnare su ogni pergamena un quadrato diverso. Il quadrato Q_1 ha lato 1 quadretto, il quadrato Q_2 ha lato 2, e così via fino a Q_{10}, che ha lato 10. Quindi riparte dalla prima pergamena e nel quadrato Q_1 Ron scrive 10; nei quattro quadratini di Q_2 scrive 9; in ogni quadratino 1×1 contenuto in Q_3 scrive il numero 8; e così via fino a scrivere 1 in tutti i quadratini di Q_{10}. La perfida prof.ssa Unboundrige sarà soddisfatta solo quando Ron le dirà la somma di tutti i numeri scritti nei quadratini. Quale numero permette a Ron di scontare la sua pena?

Soluzione. La somma cercata è $S = 10 \cdot 1^2 + 9 \cdot 2^2 + 8 \cdot 3^2 + 7 \cdot 4^2 + \ldots + 1 \cdot 10^2$. Per meglio considerare questa somma, scriviamo che $10 = 11 - 1$, $9 = 11 - 2$, ... , $1 = 11 - 10$ per cui troviamo

$$\begin{aligned} S &= (11-1) \cdot 1^2 + (11-2) \cdot 2^2 + (11-3) \cdot 3^2 + \ldots + (11-10) \cdot 10^2 \\ &= 11 \cdot (1^2 + 2^2 + \ldots + 10^2) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 10^3). \end{aligned}$$

Usando ora che la somma dei primi n quadrati è $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e che la somma dei primi n cubi è $(\frac{n(n+1)}{2})^2$ troviamo $S = 11 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - (\frac{10 \cdot 11}{2})^2 = 5 \cdot 11^2 \cdot (7 - 5) = 1210$

9. Questione di punti di vista [⋆] — ***Leonardo Franchi***



La sala del pub *Tre manici topologici* ha la pianta a forma di triangolo ABC con angoli $\hat{A} = 110°, \hat{B} = 38°, \hat{C} = 32°$. Il bancone è posto nel punto E su BC tale che $\widehat{AEB} = 102°$. Detto D il punto di AC che è piede della bisettrice da B, la barista sa che può sorvegliare l'ingresso dall'angolo $\widehat{AED}$. Qual è l'ampiezza di quest'ultimo (in gradi)?

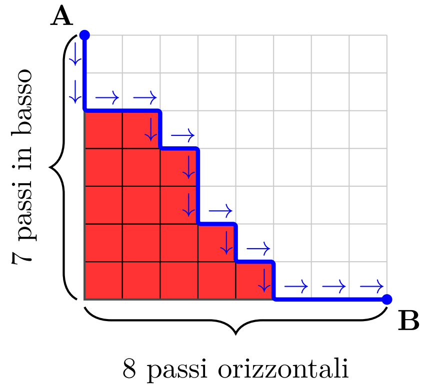
Soluzione. L'angolo esterno ad A nel triangolo BAE è $140° = 38° + 102°$. Invece l'angolo esterno in A nel triangolo ABC è $70° = 38° + 32°$. In particolare AC risulta essere bisettrice esterna in A nel triangolo ABE. Ma allora D è punto di incontro di una bisettrice esterna e una interna, e appartiene dunque alla rimanente bisettrice esterna, cioè ED è bisettrice di $\widehat{AEC} = 78°$. Dunque $\widehat{AED} = 39°$.

10. Dubbi solitari — ***Angelo Giustiniani***

Ron sta aspettando il suo amico Hardy per sfidarlo in una partita a *magic-force-4*, un gioco che si fa con gettoni da inserire in una griglia verticale fatta da 8 colonne, in ogni colonna si possono infilare al massimo 7 gettoni uno sopra l'altro. Nell'attesa Ron lascia cadere il primo gettone nella prima colonna a sinistra e questo va ad occupare il posto in basso a sinistra. Quando mette un nuovo gettone, se nel posto alla sinistra del gettone appena inserito c'è già un gettone, allora la mossa è valida. Un'altra mossa valida è inserire un nuovo gettone nella prima colonna a sinistra. Ron può fermarsi quando vuole. Quante sono le configurazioni che Ron può ottenere facendo solo mosse valide (ricordando che ha già messo un gettone)?

Soluzione 1. Le configurazioni che può ottenere Ron sono quelle che in ogni colonna hanno almeno tanti gettoni quanti la colonna alla sua destra. Immaginiamo ora di aggiungere un gettone nell'ultima colonna, due gettoni nella penultima colonna e così via, fino ad aggiungere 8 gettoni alla prima colonna: in questo modo abbiamo una configurazione dove il numero di gettoni in ogni colonna è strettamente di più della colonna alla sua destra, e la prima colonna ha al più 15 gettoni. Queste configurazioni sono facili da contare perché corrispondono ai sottoinsiemi di 8 elementi di $\{1,2,3,\ldots,15\}$: per ogni sottoinsieme infatti possiamo prendere i suoi elementi in ordine decrescente e questi saranno le numerosità delle colonne, e viceversa. Dunque le configurazioni ottenibili sono $\binom{15}{8} - 1 = 6434$, dove abbiamo escluso la configurazione vuota.

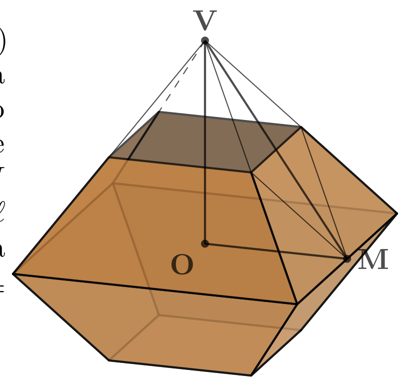
Soluzione 2. Le configurazioni che può ottenere Ron sono quelle che in ogni colonna hanno almeno tanti gettoni quanti la colonna alla sua destra. Immaginiamo ora di avere una scacchiera con 7×6 caselle e per ogni configurazione coloriamo di rosso le caselle corrispondenti ai gettoni presenti, e consideriamo il perimetro interno della zona rossa così costruita, completato con il lato di sinistra e quello in basso, così come in figura. Notiamo che questo percorso dal punto A al punto B compie per forza solo passi in basso (7) e passi a sinistra (8); inoltre per ogni percorso così fatto, è identificata una zona rossa (le caselle che rimangono sotto il percorso) che rappresenta una configurazione ottenibile. Basta dunque contare i percorsi che sono gli anagrammi di $\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$, cioè $\frac{(8+7)!}{8!\cdot 7!} - 1 = 6434$, dove abbiamo escluso la configurazione vuota: nell'esempio in figura la permutazione è $\downarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\downarrow\rightarrow\rightarrow\rightarrow$.



11. Modellismo — ***Luca Lamanna***

Ron è talmente emozionato per l'assegnazione della Coppa delle Case che vuole costruirne una replica di cartone. Comincia ritagliando lo sviluppo piano della coppa: un quadrato di lato 6 cm su ciascuno dei cui lati è costruito un esagono regolare, esterno al quadrato. Ron poi l'assembla, facendo combaciare i lati di esagoni che hanno in comune un vertice e piegando poi gli esagoni verso l'interno, lungo la diagonale maggiore parallela ai lati del quadrato. In questo modo la coppa, che ha un foro quadrato in cima, è pronta. Qual è il suo volume (in cm^3)?

Soluzione. Notiamo che le diagonali maggiori degli esagoni (dove pieghiamo) formano un quadrato di lato 2ℓ dove ℓ è il lato di base, e che la parte sopra del solido è uguale alla parte sotto ma ribaltata. Ci concentriamo sul tronco di piramide superiore. Completiamo il tronco di piramide ad una piramide come in figura; considerando una faccia laterale, per Talete la sua altezza VM sarà il doppio dell'apotema dell'esagono, e quindi sarà $\sqrt{3}\ell$. Invece $OM = \ell$ e l'altezza della piramide è $VO = \sqrt{VM^2 - OM^2} = \sqrt{2}\ell$. Il suo volume sarà $V_P = \frac{1}{3}(2\ell)^2 \cdot \sqrt{2}\ell = \frac{4\sqrt{2}}{3}\ell^3$; ma allora il volume del tronco di piramide sarà $V_T = V_P - \frac{1}{8}V_P = \frac{7\sqrt{2}}{6}\ell^3$. Il volume totale è dunque $2V_T = \frac{7\sqrt{2}}{3}\ell^3 = 504\sqrt{2} = 712{,}7\ldots$



12. Tra i cattivi — ***Giuseppe Mascellani***

Il matemago più cattivo di sempre, *Colui-che-non-può-essere-dimostrato*, testa la lealtà dei suoi seguaci proponendo il seguente quesito. Dato un intero positivo a, definisce $K_0 = 1$ e, per ogni $n \geq 0$, $K_{n+1} = K_n + aK_{n-1} + \ldots + a^n K_0$. Chiede poi di determinare la somma di tutti gli interi positivi n per cui è possibile che $K_n = 4096$. Cosa devono rispondere i seguaci, per aver salva la vita?

Soluzione. Facendo i primi casi troviamo che $K_1 = 1$, $K_2 = 1 + a$, $K_3 = (1+a) + a + a^2 = 1 + 2a + a^2 = (1+a)^2$, quindi possiamo congetturare che $K_n = (1+a)^{n-1}$ per $n \geq 1$. Rimandiamo la dimostrazione di questo fatto a dopo. Per concludere l'esercizio è ora sufficiente trovare gli n per cui esiste a tale che $(1+a)^{n-1} = 4096 = 2^{12}$. Questo può accadere solo quando $n-1|12$ e quindi $n-1 \in \{1,2,3,4,6,12\}$ per cui la somma voluta è $2+3+4+5+7+13=34$.

Per dimostrare la formula per K_n si può guardare a $K_{n+2} = K_{n+1} + aK_n + a^2K_{n-1} + \ldots + a^{n+1}K_0$. Possiamo raccogliere il fattore a da tutti gli addendi al secondo membro a parte il primo, ottenendo

$$K_{n+2} = K_{n+1} + a\left(K_n + aK_{n-1} + \ldots + a^n K_0\right).$$

Nell'espressione tra parentesi riconosciamo la definizione di K_{n+1}, dunque $K_{n+2} = K_{n+1} + aK_{n+1} = (1+a)K_{n+1}$. Quindi K_n è una progressione geometrica di ragione $(1+a)$, come volevamo dimostrare.

13. Tanti giorni per un ordine meraviglioso — *Alessandro Lombardo*

Pomona Springer, docente di Erbologia, cura in una serra segreta le sue preziose 2026 mandragore, inizialmente tutte alte 10^9 *nano*bacchette (*nb*), cioè una bacchetta. Ogni giorno annaffia esattamente 101 mandragore distinte. A fine giornata le mandragore che quel giorno sono state annaffiate crescono di 1 *nb*, mentre le altre si riducono di 1 *nb*. Un giorno, prima di innaffiare le mandragore, la prof. Springer decide di ordinare i vasi delle mandragore mettendoli in ordine dalla più bassa alla più alta. Nel compiere questa azione si accorge che le piante hanno tutte altezze diverse e che la differenza di altezza tra due piante consecutive rimane costante. Quanti giorni sono trascorsi, come minimo, da quel dì in cui ella iniziò a prendersi cura delle mandragore?

Soluzione. Se sono passati d giorni e una mandragora è stata annaffiata k volte, la sua altezza è $10^9 - d + 2k$. Quindi, perché le altezze siano tutte diverse e in progressione aritmetica, anche i numeri di annaffiature devono essere 2026 termini distinti di una progressione aritmetica, diciamo

$$a, a+r, a+2r, \ldots, a+(2026-1)r$$

con $r \geq 1$. Inoltre la somma di tutti questi numeri è $101d$. Otteniamo

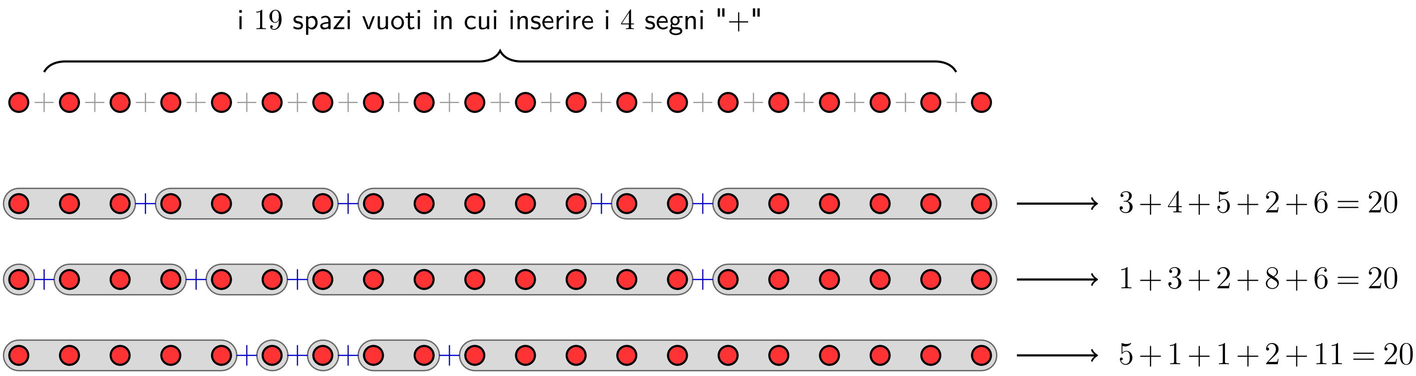
$$1013(2a+2025r) = 101d.$$

Bisogna minimizzare $2a+2025r$, che deve essere multiplo di 101: il minimo si ha con $r=1$ e $a=48$, quindi $2a+2025r = 2121$. Allora $d = 1013 \cdot 21 = 21273$, e si risponde con le ultime quattro cifre, cioè 1273. Si può verificare che questi numeri di annaffiature sono effettivamente realizzabili con giornate da 101 mandragore distinte.

14. *Rapportaureo* vs *Perognesiste* — *Eugenio Trovarelli*

È il giorno dell'attesa sfida di Quamditch tra la squadra di *Rapportaureo* e quella di *Perognesiste*, capitanata da Cedric Villany. Hardy nota che in fondo al campo di gara sono appesi 20 scudi in fila, ciascuno dipinto con il colore di una delle due case (rosso o giallo), e che il numero di scudi gialli è strettamente maggiore del numero di scudi rossi. Prima di salire sulla sua scopa, Hardy, un po' nervoso, osserva di sfuggita che, tra tutte le coppie di scudi adiacenti, esattamente 15 sono formate da scudi dello stesso colore. Quante sono le possibili colorazioni degli scudi?

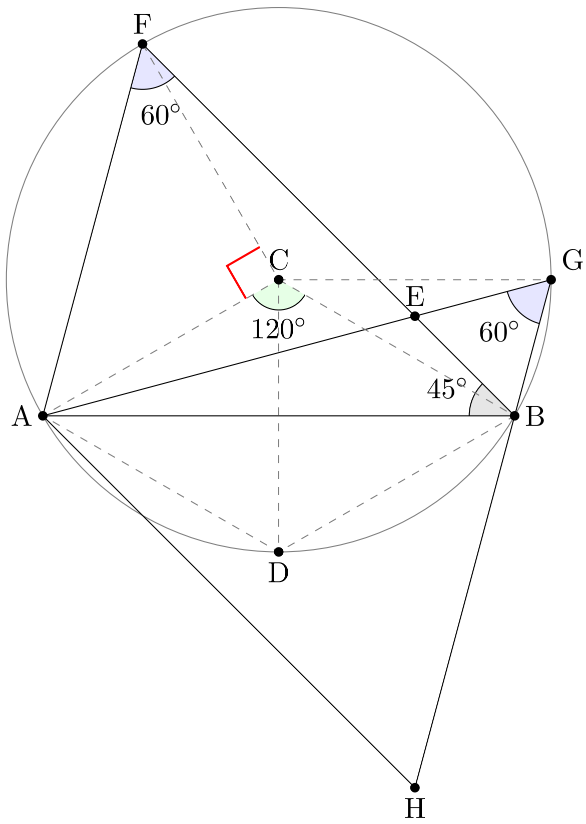
Soluzione. Il fatto che ci siano 15 coppie di scudi adiacenti che hanno lo stesso colore impone che ce ne sia esattamente 4 che hanno scudi di colore diverso. Quindi ci sono 5 sequenze contigue di scudi A, B, C, D, E a colori alterni, e ognuna di queste sequenze è non vuota. Dette a,b,c,d,e le loro numerosità abbiamo che $a+b+c+d+e=20$. Il modo di scegliere queste numerosità è $\binom{19}{4}$ e lo possiamo vedere in questo modo: consideriamo 20 palline e immaginiamo di mettere 4 segni + nei 19 spazi tra di loro. Questa cosa si può fare esattamente in $\binom{19}{4}$ modi perché dobbiamo scegliere un sottoinsieme di 4 elementi in uno di 19.



Ogni scelta di dove mettiamo i "+" porta ad una diversa suddivisione di 20 in 5 addendi positivi (vedi figura). Una volta scelta la numerosità delle sequenze contigue di scudi, c'è un solo modo di assegnare i colori che renda vero che il numero di scudi gialli è strettamente maggiore del numero di scudi rossi, a meno che $a+c+e = b+d = 10$. Similmente possiamo contare quante volte questa cosa può succedere, e sarà in $\binom{9}{2} \cdot \binom{9}{2}$ modi. Quindi la risposta finale è $\binom{19}{4} - \binom{9}{2} \cdot \binom{9}{2} = 3552$.

15. La condizione per segnare ***Guido Lido***

Nel campo di Quamditch sono poste due ceste in C e D e poi due arbitri in A e B, in maniera che ACD e BCD siano equilateri ma non coincidenti. La squadra di *Rapportaureo* (composta da Hardy, Hermita, Ron e Norris) deve segnare in C. Tuttavia per segnare un punto regolare il tiratore deve avere un giocatore pivot tale che essi siano allineati con B, che formino un triangolo equilatero con A e il tiratore sia più vicino alla cesta C del pivot. Hardy e Hermita (posti in E ed G) sono pronti a segnare come tiratori, avendo come pivot rispettivamente Ron e Norris (posti in F ed H). Sappiamo inoltre che $\widehat{ABE} = 45°$ e che $\widehat{ABH} = 75°$, e E e G sono dalla stessa parte di C rispetto alla retta AB. Sapendo che EF misura 100 bacchette, determinare $GC + FC$ (in bacchette).



Soluzione. Innanzitutto notiamo che H e G saranno da due parti opposte rispetto ad AB e per soddisfare la condizione che Hermita è più vicina a C rispetto a Norris, avremo che G sta dalla stessa parte di C rispetto ad AB. Quindi anche E ed F si troveranno dalla stessa parte di C rispetto ad AB e dunque la configurazione risulta essere quella in figura. Osserviamo ora che, poiché $\widehat{AFB} = \widehat{AGB} = 60°$, A, F, G, B risultano stare sulla stessa circonferenza Γ; inoltre ACB è isoscele di base AB e $\widehat{ACB} = 120° = 2 \cdot 60°$ e quindi per il teorema inverso di angoli al centro - angoli alla circonferenza, si ha che C è il centro di Γ e il suo raggio R è $CF = CA = CB = CG$. Ma allora $\widehat{FCA} = 2 \cdot \widehat{FBA} = 90°$: FAC è dunque un triangolo rettangolo isoscele di base FA e quindi $R = FC = FA/\sqrt{2} = EF/\sqrt{2}$. Possiamo concludere che $GC + FC = 2R = \sqrt{2}EF = 100\sqrt{2} = 141,\ldots$.

16. Interi di differenza ***Gaia Fuselli***

Nella Stanza delle Condizioni Necessarie c'è tutto ciò che serve a un matemago. Luna Lovegödel stava cercando gli interi n compresi tra -400 e 400, estremi inclusi, che si possano scrivere come differenza tra la somma di due quadrati e la somma di altri due quadrati (quadrati di opportuni numeri interi, anche uguali). Quanti diversi numeri n ha trovato Luna?

Soluzione. Luna sta cercando tutti gli interi della forma $n = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$. Notiamo che prendendo $(a,b,c,d) = (k+1,0,k,0)$ si ha $n = 2k+1$, quindi al variare di k otteniamo tutti i dispari, mentre prendendo $(a,b,c,d) = (k+1,0,k,1)$ si ha $n = 2k$ quindi otteniamo tutti i pari. Quindi possiamo ottenere tutti i numeri interi. La risposta è allora $2 \cdot 400 + 1 = 801$.

XXVII Gara Nazionale a Squadre

Semifinale 2 – Venerdì 8 Maggio 2026

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	Divisibilità rivelatoria	0011
2	Divinazione	0131
3	Somme aritmantiche	0133
4	L'incantesimo di Geomanzia	0373
5	Destinazioni senza ritorno	0040
6	Schema di Quamditch	0346
7	Mettere le radici [$\star$]	6142
8	Un quadrato dopo l'altro	1210
9	Questione di punti di vista [$\star$]	0039
10	Dubbi solitari	6434
11	Modellismo	0712
12	Tra i cattivi	0034
13	Tanti giorni per un ordine meraviglioso	1273
14	*Rapportaureo* vs *Perognesiste*	3552
15	La condizione per segnare	0141
16	Interi di differenza	0801