

I numeri di Fibonacci e la Geometria

Dal *Liber Abaci* alla Formula di Binet

Luigi Tomasi

Centro Ricerche Didattiche "U. Morin"

Cesenatico, 8 maggio 2026

124

geminat. sic fit i fo meste para z er quib' i uno meste duo ygnant
geminat in teo meste para z conieloz. sic fit para y i ipso m
se. er quib' i ipso ygnat para z fit i qtro meste para s er qb'
para y geminat alia para y quib' addunt cu parit s fia
ut para z i qtro meste. er qb' para y q geminata fuerit i ipso
mste si gemit i ipso mste h' alia s paria ygnant. sic fit i tertio meste
para z. cu qb' addunt parit. 12 q geminat i septio erit i ipso
para z. cu quib' addunt parit. 12 q geminat i octavo meste.
erit i ipso para y y cu quib' addunt parit. 7 q geminat i no
no meste erit i ipso para s. cu quib' addunt rursu parit. 4 q
q geminat i decimo. erit i ipso para 12 q cu quib' addunt rursu
parit. 8 q geminat i undecimo meste. erit i ipso para z z
cu qb' addunt parit. 12 q geminat i ultimo meste. erit
para z z z. tot para p'p'ur sim par i p'fato loco i capite uni
am. potet e unde i hao margine. qualr hoc opati fuim. s. q' uirini
p'mu num cu fo uideh. cu z fm e teo. z teo cu qtro. z q'
n' cu qtro. sic decept donec uirini decimū cu undecimo. uideh
12 q cu z z z. hūim' s'oz cunieloz sumā uideh. z z z
sic possit face p ordine de istant null meste.

Omnis hoies fit quoz p'm' sed' t'cu h'nt d'fios. sed' itaq' t'cu q'v' d'
h'nt d'fios z i t'cu q'v' p'm' h'nt d'fios z r' t'cu z p'm' z p'
h'nt d'fios z z. p' q' u' h'nt. adde ho' u'z. n'os i unū erit
z z q' n'it e t'p'u' t'cu h'nt d'fios. illoz. u'z. h'nt. p'oz q' i ipso
sumā unū q'v' eoz e q'v'at' e q'v' d'nto ipso p' z redd' p' z p'oz
sumā. er qua si erunt d'fios p'm' z fi z t'cu h'nt. z z remanebit
q'ro hōi d'f' 16 sed' si er ipse d'fios z z erunt d'fios z i fi
z t'cu q'v' hōis remanebit p'mo hōi d'f' z z. Rursu si de d'fios z z
erunt d'fios z z. d'f' t'cu q'v' hōis. p'mi hōis remanebit fo d'f'
z z. adhuc si de d'fios z z erunt d'fios z z q'v' p'mi z sed' hōis
remanebit teo d'f' z z. cōsuet' itaq' d'fios z z p'mi hōis cu z
sed' z cu z t'cu er cu 12 q'v' m'ntu s'z redd' p' z z

Si h' p'ostu h'nt q' int' p'mū z fm hōis h'nt d'fios z z. Er int' fm
t'cu h'nt d'fios z i. Er int' t'cu q'v' z z. int' q'v' z p'mū z z
z h'nt h' p'ostu q'v'q' solui possit q'v'q' n' d'nt ut ipse q' solui possit
ab hys qui solui n' possit cognoscit. tale e' t'udū euidē. l' uideh
ut addat nūm p'mi z fi. cu nūo t'cu q'v' z si eoz sumā equal' h'nt
nūo h' t'cu q'v' z p'mi. tē solub' erit q'ho. si rē sequal' h'nt. tē a
nō possit solui cognoscit ut i hac q'stione i q' p'm' sed' h' z z. er
t'cu q'v' h'nt z z. g' int' omē. u'z. h'nt d'fios z z. s'z sed' t'cu

parit
1
p'm
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100

I n' e' er f' meste er n'it m' p' h'nt er n'it m' p' h'nt er n'it m' p' h'nt

Indice

Leonardo Pisano

Il problema delle coppie di conigli

La successione di Fibonacci

Numeri di Fibonacci e triangolo di Tartaglia

Proprietà dei numeri di Fibonacci

Il rapporto aureo

Formula di Binet

Limite del rapporto F_{n+1}/F_n

Funzione generatrice dei numeri di Fibonacci

Quadrati, rettangoli e spirali costruiti sui numeri di Fibonacci

Numeri di Lucas

La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

Conclusioni

I numeri di Fibonacci costituiscono uno degli argomenti più interessanti della Matematica, nel quale è possibile collegare aritmetica, algebra, geometria e applicazioni al mondo reale.

In questa conversazione, di carattere divulgativo e didattico, rivolta sia a docenti che studenti, verrà introdotta la successione di Fibonacci a partire dalla sua definizione ricorsiva, per poi esplorarne alcune proprietà fondamentali: le relazioni tra i termini, la formula di Binet e i collegamenti con il rapporto aureo.

Leonardo Pisano, detto Fibonacci (Pisa, 1170 ca. -1242 ca.)

- ▶ È considerato il più grande matematico del Medioevo.
- ▶ Contribuì in modo decisivo alla rinascita della Matematica dopo la decadenza dell'età tardo-antica e dell'Alto Medioevo.
- ▶ Con Fibonacci, in Europa, ci fu l'unione fra gli strumenti matematici di calcolo elaborati dalla scienza indo-araba e i procedimenti della geometria greca euclidea (*Elementi* di Euclide).

Francobollo commemorativo di Fibonacci, 2020

Francobollo ad 850 anni dalla nascita di Fibonacci (1170 ca.)



La repubblica marinara di Pisa attorno al 1200

Attorno al 1200, Pisa vive l'apice del suo splendore come Repubblica Marinara, dominando le rotte commerciali del Mediterraneo e consolidando un dominio che includeva territori in Sardegna, Corsica e numerosi empori in Oriente.

Potenza politica e marittima, di dominio sul Mediterraneo: grazie alla partecipazione alle Crociate, i mercanti pisani ottennero privilegi commerciali immensi in città come Costantinopoli, Acri e Alessandria. In questo periodo, Pisa è la principale alleata dell'Impero nel Tirreno, mantenendo una ferma posizione ghibellina.

Il padre decide di portare Leonardo a Bùgia (attuale Algeria)

Il padre di Fibonacci, notaio della Repubblica di Pisa, decide di portarlo (a 16 o 17 anni) con sé a Bùgia (attuale Algeria) per fargli imparare il calcolo aritmetico diffuso nel mondo arabo.

Questa immagine, e in generale la maggior parte dei ritratti di Leonardo Pisano (detto Fibonacci), non risale alla sua epoca (XII-XIII secolo), poiché non esistono raffigurazioni a lui contemporanee. Il ritratto più diffuso qui a fianco, di fantasia, è un'incisione del XIX secolo e si stima sia stato creato intorno al 1850, a Firenze.



Il padre decide di portare Leonardo a Bùgia (attuale Algeria)

Il padre di Fibonacci, notaio della Repubblica di Pisa, decide di portarlo (a 16 o 17 anni) con sé a Bùgia (attuale Algeria) per fargli imparare il calcolo aritmetico diffuso nel mondo arabo.

Questa immagine, e in generale la maggior parte dei ritratti di Leonardo Pisano (detto Fibonacci), non risale alla sua epoca (XII-XIII secolo), poiché non esistono raffigurazioni a lui contemporanee. Il ritratto più diffuso qui a fianco, di fantasia, è un'incisione del XIX secolo e si stima sia stato creato intorno al 1850, a Firenze.



Dov'è Bùgia? (oggi: Béjaïa, Algeria)



Leonardo viaggiò in tutto il Mediterraneo

... e imparò perfettamente il calcolo aritmetico e algebrico degli Arabi

Leonardo non rimase soltanto a Bùgia, ma viaggiò in tutto il Mediterraneo: Egitto, Siria, Grecia, Costantinopoli, Sicilia, Provenza, . . . ovunque i pisani avessero commerci e affari.

Al ritorno dal suo lungo viaggio, nel 1202, scrisse un famoso libro, la sua grande opera sull'aritmetica e l'algebra, in latino, intitolato *Liber Abbaci* ossia, il *Libro del calcolo* (sottinteso, «aritmetico e algebrico»).

Nel 1228 ne scrisse una seconda versione, che ci è rimasta in alcune copie. Nel 2020, ad 850 anni dalla nascita, **Enrico Giusti** (con il latinista Paolo D'Alessandro) ne ha curato l'edizione critica.

Fibonacci descrive il suo viaggio e i suoi studi nel Capitolo I, paragrafo 3, del *Liber Abbaci*.

Liber Abbaci, Prologo: note autobiografiche di Fibonacci

*Quando mio padre fu nominato dalla patria pubblico scrivano nella dogana di Bùgia per tutelare gli interessi dei mercanti pisani che vi affluivano, mi fece andare da lui, durante la mia fanciullezza, **valutando l'utilità e il vantaggio futuro**, e volle che mi fermassi lì per qualche tempo, per essere istruito nello studio dell'abbaco.*

Qui, introdotto nell'arte da uno straordinario insegnamento basato sulle nove figure (cifre) degli Indiani mi piacque sopra ogni altra cosa la conoscenza dell'arte e tanto compresi a suo riguardo che imparai, con grande impegno e attraverso il contraddittorio delle dispute, qualunque cosa si studiasse di essa in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza con i loro diversi modi, luoghi di commercio in cui successivamente io mi recai spesso per affari.

Liber Abbaci, Prologo: note autobiografiche di Fibonacci

*Quando mio padre fu nominato dalla patria pubblico scrivano nella dogana di Bùgia per tutelare gli interessi dei mercanti pisani che vi affluivano, mi fece andare da lui, durante la mia fanciullezza, **valutando l'utilità e il vantaggio futuro**, e volle che mi fermassi lì per qualche tempo, per essere istruito nello studio dell'abbaco.*

*Qui, introdotto nell'arte **da uno straordinario insegnamento basato sulle nove figure (cifre) degli Indiani** mi piacque sopra ogni altra cosa la conoscenza dell'arte e tanto compresi a suo riguardo che imparai, con grande impegno e attraverso il contraddittorio delle dispute, qualunque cosa si studiasse di essa in Egitto, Siria, Grecia, Sicilia e Provenza con i loro diversi modi, luoghi di commercio in cui successivamente io mi recai spesso per affari.*

Liber abbaci (1202): una ricchissima miscellanea di matematica

L'opera è una ricchissima miscellanea di problemi di matematica, da quelli strettamente legati alla mercanzia, ai baratti e alle compagnie commerciali, a quelli puramente matematici.

Il livello matematico è molto accurato, completo di dimostrazioni, sia logiche sia geometriche, per giustificare le affermazioni fatte, con un metodo indubbiamente legato all'impostazione logico-deduttiva che gli arabi avevano importato dai greci.

L'opera nel suo complesso si può considerare un prolungamento latino della matematica araba, sulla scia di al-Khwārizmī (ca. 780 - ca. 850), ma si tratta di un'opera molto più approfondita.

Liber abbaci (1202): una ricchissima miscellanea di matematica

L'opera è una ricchissima miscellanea di problemi di matematica, da quelli strettamente legati alla mercanzia, ai baratti e alle compagnie commerciali, a quelli puramente matematici.

Il livello matematico è molto accurato, completo di dimostrazioni, sia logiche sia geometriche, per giustificare le affermazioni fatte, con un metodo indubbiamente legato all'impostazione logico-deduttiva che gli arabi avevano importato dai greci.

L'opera nel suo complesso si può considerare un prolungamento latino della matematica araba, sulla scia di al-Khwārizmī (ca. 780 - ca. 850), ma si tratta di un'opera molto più approfondita.

Liber abbaci (1202): una ricchissima miscellanea di matematica

L'opera è una ricchissima miscellanea di problemi di matematica, da quelli strettamente legati alla mercanzia, ai baratti e alle compagnie commerciali, a quelli puramente matematici.

Il livello matematico è molto accurato, completo di dimostrazioni, sia logiche sia geometriche, per giustificare le affermazioni fatte, con un metodo indubbiamente legato all'impostazione logico-deduttiva che gli arabi avevano importato dai greci.

L'opera nel suo complesso si può considerare un prolungamento latino della matematica araba, sulla scia di al-Khwārizmī (ca. 780 - ca. 850), ma si tratta di un'opera molto più approfondita.

Liber Abbaci: il problema delle coppie di conigli in un anno

Il problema è presentato nel capitolo **XII** del *Liber Abbaci* (1202) di **Leonardo Pisano, detto Fibonacci**.

- ▶ Prima apparizione documentata della successione.
- ▶ Problema sulla crescita del numero di coppie di una popolazione di conigli.
- ▶ Fibonacci fornisce la soluzione dettagliata del problema.
- ▶ Il *Liber Abbaci* viene stampato da Baldassarre Boncompagni, Roma, 1857.
- ▶ Nell'Ottocento Fibonacci viene quindi riscoperto dal matematico francese Eduard Lucas.

Il problema nell'edizione del Liber Abbaci di Boncompagni

XII.7.30

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Quidam posuit unum par cuniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinerentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant. Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense | geminat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense; ex quibus in ipso pregnantur paria 3; et sunt in quarto mense paria 8; ex quibus paria 5 geminant alia paria 3: quibus additis cum parijs 8, faciunt paria 13 in quinto mense; ex quibus paria 5, que geminata fuerunt in ipso mense, non concipiunt in ipso mense, sed alia 8 paria pregnantur; et sic sunt in sexto mense paria 21;

Liber Abbaci, Problema XII.7.30

Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur.

Quidam posuit unum par coniculorum in quodam loco, qui erat undique pariete circumdatus, ut sciret, quot ex eo paria germinarentur in uno anno: cum natura eorum sit per singulum mensem aliud par germinare; et in secundo mense ab eorum natiuitate germinant.

Quia suprascriptum par in primo mense germinat, duplicabis ipsum, erunt paria duo in uno mense. Ex quibus unum, scilicet primum, in secundo mense germinat; et sic sunt in secundo mense paria 3; ex quibus in uno mense duo pregnantur; et geminantur in tercio mense paria 2 coniculorum; et sic sunt paria 5 in ipso mense quibus additis cum parijs 8, faciunt paria 13 in quinto mense;

Quante paia di conigli sono generate da un solo paio in un anno.

Un tale mise un paio di conigli in un certo luogo, circondato da un muro, per sapere quante paia ne fossero prodotte in un anno: essendo la loro natura quella di generare un altro paio ogni mese; e generano nel secondo mese dalla loro nascita.

Poiché il suddetto paio genera nel primo mese, lo raddoppierai, e ci saranno **2** paia. Di queste, la prima genera nel secondo mese; e così ci sono **3** paia; di queste 2 diventano gravide; e nel terzo mese sono generate 2 paia; e così ci sono **5** paia le quali, aggiunte alle **8** coppie, fanno **13** coppie nel quinto mese;

Traduzione dal latino in italiano

cum quibus additis parijs 13, que geminantur in septimo, erunt in ipso paria 34; cum quibus additis parijs 21, que geminantur in octauo mense, erunt in ipso paria 55; cum quibus additis parijs 34, que geminantur in nono mense, erunt in ipso paria 89; cum quibus additis rursum parijs 55, que geminantur in decimo, erunt in ipso paria 144; cum quibus additis rursum parijs 89, que geminantur in undecimo mense, erunt in ipso paria 233.

Cum quibus etiam additis parijs 144, que geminantur in ultimo mense, erunt paria 377; et tot paria peperit suprascriptum par in prefato loco in capite unius anni.

a queste somma le 13 coppie che nascono nel settimo, ci saranno in questo stesso mese 34 coppie; e sommate a queste le 21 coppie che sono nate nell'ottavo mese, ci saranno nello stesso mese 55 coppie; sommate a queste le 34 coppie che nascono nel nono mese, ci saranno in esso 89 coppie; sommate ancora a queste le 55 coppie che nascono nel decimo mese, ci saranno 144 coppie; sommate ancora a queste 89 coppie, che sono nate nell'undicesimo mese, ci saranno in esso 233 coppie.

E sommate a queste anche le 144 coppie che hanno partorito nell'ultimo mese, saranno 377 coppie, e tante coppie ha partorito la coppia sopra citata nel luogo predetto in capo a un solo anno.

Traduzione dal latino in italiano

Potes enim uidere in hac margine, qualiter hoc operati fuimus, scilicet quod iunximus primum numerum cum secundo, uidelicet 1 cum 2; et secundum cum tercio; et tercium cum quarto; et quartum cum quinto, et sic deinceps, donec iunximus decimum cum undecimo, uidelicet 144 cum 233; et habuimus suprascriptorum cuniculorum summam, uidelicet 377;

et sic posses facere per ordinem **de infinitis numeris mensibus**.

Puoi infatti vedere qui a margine come abbiamo operato, cioè che abbiamo unito il primo numero col secondo, vale a dire 1 con 2; e il secondo col terzo; e il terzo col quarto; e il quarto col quinto, e così via, fino a che abbiamo unito il decimo con l'undicesimo, cioè 144 con 233; e abbiamo ottenuto la somma dei suddetti conigli, ossia **377**;

e così potresti fare in ordine **per un numero infinito di mesi**.

Crescita del numero di coppie (in un anno...)

La regola per Fibonacci è quindi: $f_0 = 1$, $f_1 = 2$,
 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ per $n \geq 2$. Si ottiene:

Mese	Coppie	Mese	Coppie
Inizio	1	7°	34
1°	2	8°	55
2°	3	9°	89
3°	5	10°	144
4°	8	11°	233
5°	13	12°	377
6°	21	...	

<i>coppia</i>
1
<i>primo</i>
2
<i>secondo</i>
3
<i>terzo</i>
5
<i>quarto</i>
8
<i>quinto</i>
13
<i>sesto</i>
21
<i>settimo</i>
34
<i>ottavo</i>
55
<i>nono</i>
89
<i>decimo</i>
144
<i>undicesimo</i>
233
<i>dodicesimo</i>
377

La successione di Fibonacci

Abbiamo visto che Fibonacci parte da $f_0 = 1$ e $f_1 = 2$ per costruire la sequenza dei numeri di coppie. Oggi si preferisce porre $F_1 = 1$ ed $F_2 = 1$. Otteniamo quindi, per esempio, la tabella dei primi 40 numeri di Fibonacci.

n	F_n	n	F_n	n	F_n	n	F_n
1	$F_1 = 1$	11	$F_{11} = 89$	21	$F_{21} = 10946$	31	$F_{31} = 1346269$
2	$F_2 = 1$	12	$F_{12} = 144$	22	$F_{22} = 17711$	32	$F_{32} = 2178309$
3	$F_3 = 2$	13	$F_{13} = 233$	23	$F_{23} = 28657$	33	$F_{33} = 3524578$
4	$F_4 = 3$	14	$F_{14} = 377$	24	$F_{24} = 46368$	34	$F_{34} = 5702887$
5	$F_5 = 5$	15	$F_{15} = 610$	25	$F_{25} = 75025$	35	$F_{35} = 9227465$
6	$F_6 = 8$	16	$F_{16} = 987$	26	$F_{26} = 121393$	36	$F_{36} = 14930352$
7	$F_7 = 13$	17	$F_{17} = 1597$	27	$F_{27} = 196418$	37	$F_{37} = 24157817$
8	$F_8 = 21$	18	$F_{18} = 2584$	28	$F_{28} = 317811$	38	$F_{38} = 39088169$
9	$F_9 = 34$	19	$F_{19} = 4181$	29	$F_{29} = 514229$	39	$F_{39} = 63245986$
10	$F_{10} = 55$	20	$F_{20} = 6765$	30	$F_{30} = 832040$	40	$F_{40} = 102334155$

Numeri di Fibonacci con Python

Con un linguaggio di programmazione (per esempio, Python) possiamo elencare alcuni numeri di Fibonacci:

- ▶ Programma (in Python) per ottenere l'n-esimo numero di Fibonacci
Testo del Link
Apri file di testo
- ▶ Programma (in Python) per ottenere una tabella di numeri di Fibonacci

Numeri di Fibonacci nel triangolo di Tartaglia

I numeri di Fibonacci si possono ritrovare nel Triangolo di Tartaglia (o Pascal). Il modo più semplice per ricavare i numeri di Fibonacci nel Triangolo di Tartaglia è osservare le sue **diagonali ascendenti**. Se allineiamo il triangolo a sinistra, le somme dei termini lungo queste diagonali corrispondono esattamente alla successione di Fibonacci.

Sia $\binom{n}{k}$ il coefficiente binomiale alla riga n e posizione k , il numero di Fibonacci F_{n+1} è dato dalla formula:

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

dove $\lfloor n/2 \rfloor$ è la funzione *floor* (parte intera inferiore) applicata a $n/2$. Per es. $\lfloor 7/2 \rfloor = 3$ e ovviamente $\lfloor 8/2 \rfloor = 4$.

Numeri di Fibonacci nel triangolo di Tartaglia

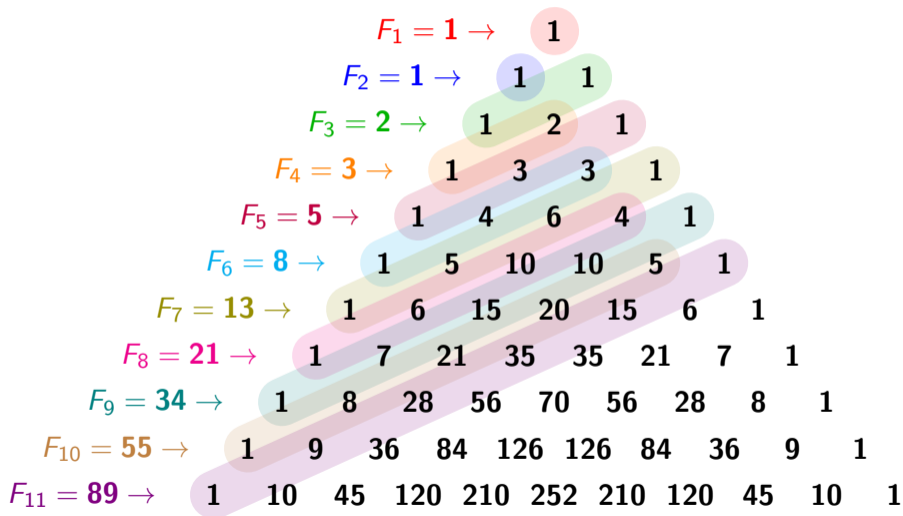
I numeri di Fibonacci si possono ritrovare nel Triangolo di Tartaglia (o Pascal). Il modo più semplice per ricavare i numeri di Fibonacci nel Triangolo di Tartaglia è osservare le sue **diagonali ascendenti**. Se allineiamo il triangolo a sinistra, le somme dei termini lungo queste diagonali corrispondono esattamente alla successione di Fibonacci.

Sia $\binom{n}{k}$ il coefficiente binomiale alla riga n e posizione k , il numero di Fibonacci F_{n+1} è dato dalla formula:

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

dove $\lfloor n/2 \rfloor$ è la funzione *floor* (parte intera inferiore) applicata a $n/2$. Per es. $\lfloor 7/2 \rfloor = 3$ e ovviamente $\lfloor 8/2 \rfloor = 4$.

Diagonali del triangolo di Tartaglia e numeri di Fibonacci



Visualizziamo le prime 9 somme

Usiamo la formula:

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

- ▶ **Somma 1:** $\binom{0}{0} = 1 \implies F_1$
- ▶ **Somma 2:** $\binom{1}{0} = 1 \implies F_2$
- ▶ **Somma 3:** $\binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 1 + 1 = 2 \implies F_3$
- ▶ **Somma 4:** $\binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 1 + 2 = 3 \implies F_4$
- ▶ **Somma 5:** $\binom{4}{0} + \binom{3}{1} + \binom{2}{2} = 1 + 3 + 1 = 5 \implies F_5$
- ▶ **Somma 6:** $\binom{5}{0} + \binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 1 + 4 + 3 = 8 \implies F_6$
- ▶ **Somma 7:** $\binom{6}{0} + \binom{5}{1} + \binom{4}{2} + \binom{3}{3} = 1 + 5 + 6 + 1 = 13 \implies F_7$
- ▶ **Somma 8:** $\binom{7}{0} + \binom{6}{1} + \binom{5}{2} + \binom{4}{3} = 1 + 6 + 10 + 4 = 21 \implies F_8$
- ▶ **Somma 9:** $\binom{8}{0} + \binom{7}{1} + \binom{6}{2} + \binom{5}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 7 + 15 + 10 + 1 = 34 \implies F_9$

L'interpretazione dei passi (combinatoria)

Il numero di Fibonacci F_{n+1} risponde al problema:

“In quanti modi posso salire una scala di n gradini facendo solo passi da 1 o da 2 ?”.

Perché la somma di 1 e 2?

Ogni numero di Fibonacci è la somma dei due precedenti ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$) perché per arrivare all'ultimo gradino n si può solo:

1. Arrivare dal gradino $n - 1$ con un **passo da 1**.
2. Arrivare dal gradino $n - 2$ con un **passo da 2**.

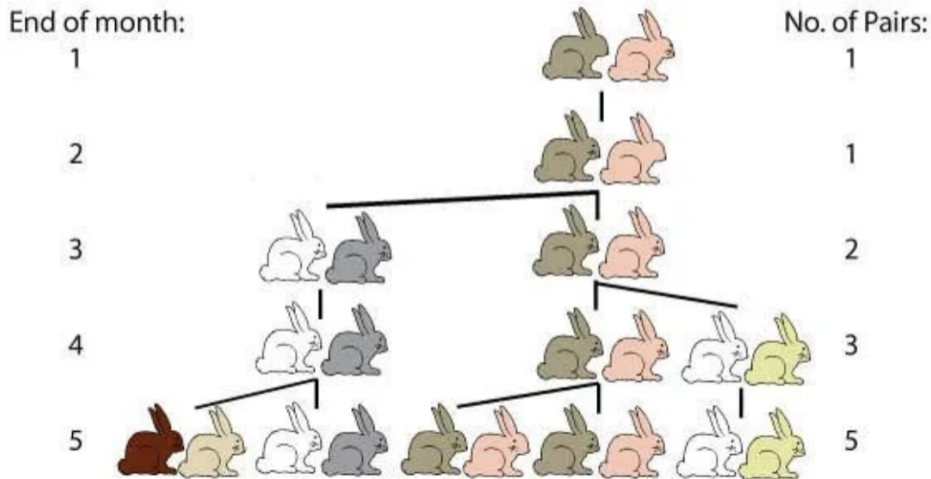
Il paragone con i conigli

Il “passo da 1” rappresenta graficamente la **maturazione di una coppia** mentre il “passo da 2” rappresenta graficamente il **ritardo generazionale**:

- ▶ **Passo da 1 (Maturazione)**: Una coppia di conigli impiega un mese per passare dallo stato giovane allo stato adulto.
- ▶ **Passo da 2 (Riproduzione)**: Una coppia già adulta produce una nuova coppia, che sarà visibile e conterà come incremento solo dopo il tempo necessario alla nascita e alla crescita.

In sintesi, il numero 2 è il vincolo della *fertilità ritardata*: non si può generare prole istantaneamente, serve un salto di “due gradini” temporali.

Passi di 1 coppia (maturazione) o di 2 coppie (riproduzione)

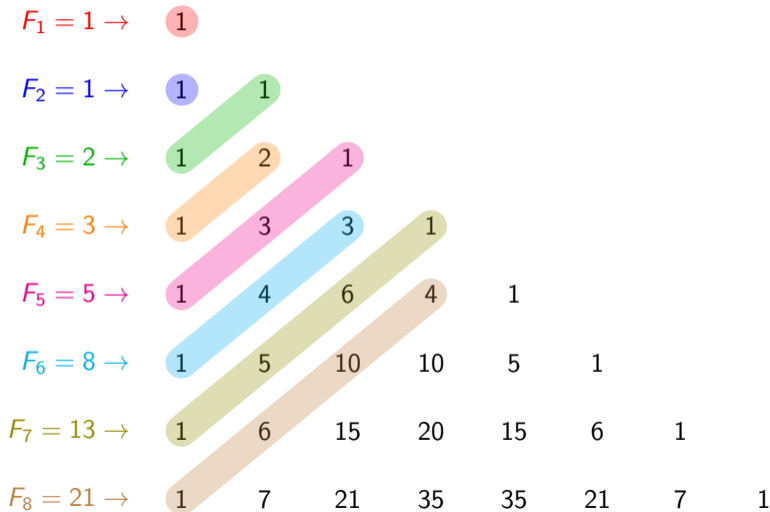


Il triangolo di Tartaglia allineato a sinistra

Rappresentando il triangolo di Tartaglia allineato a sinistra, è più facile individuare le diagonali ascendenti da sommare per ottenere i numeri di Fibonacci:

$n = 0$		1									
$n = 1$		1	1								
$n = 2$		1	2	1							
$n = 3$		1	3	3	1						
$n = 4$		1	4	6	4	1					
$n = 5$		1	5	10	10	5	1				
$n = 6$		1	6	15	20	15	6	1			
$n = 7$		1	7	21	35	35	21	7	1		
$n = 8$		1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$n = 9$		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

Il triangolo di Tartaglia allineato a sinistra e le diagonali

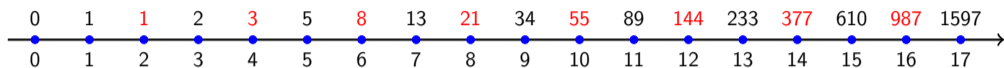


Triangolo di Tartaglia e numeri di Fibonacci: somme in colonna

Spostiamo progressivamente in avanti di un passo le righe del triangolo di Tartaglia.

Riga 0	1										
Riga 1		1	1								
Riga 2			1	2	1						
Riga 3				1	3	3	1				
Riga 4					1	4	6	4	1		
Riga 5						1	5	10	10	5	1
Riga 6							1	6	15	20	15
Riga 7								1	7	21	35
Riga 8									1	8	28
Riga 9										1	9
Riga 10											1
Somma	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
Fibonacci	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}

Proprietà 1: Somma dei primi n numeri di Fibonacci



$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$$

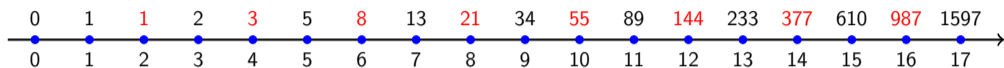
Dimostrazione: Esprimiamo ogni termine come differenza tra due termini successivi:

$$\begin{array}{ll} F_1 = F_3 - F_2 & \dots \\ F_2 = F_4 - F_3 & \dots \\ F_3 = F_5 - F_4 & F_{n-1} = F_{n+1} - F_n \\ F_4 = F_6 - F_5 & F_n = F_{n+2} - F_{n+1} \end{array}$$

Sommando membro a membro, si ottiene una somma telescopica:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

Proprietà 1: Somma dei primi n numeri di Fibonacci



$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

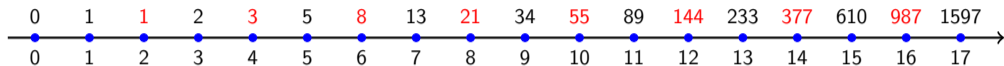
Dimostrazione: Esprimiamo ogni termine come differenza tra due termini successivi:

$$\begin{array}{ll} F_1 = F_3 - F_2 & \dots \\ F_2 = F_4 - F_3 & \dots \\ F_3 = F_5 - F_4 & F_{n-1} = F_{n+1} - F_n \\ F_4 = F_6 - F_5 & F_n = F_{n+2} - F_{n+1} \end{array}$$

Sommando membro a membro, si ottiene una somma telescopica:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1$$

Proprietà 2: Somma dei primi n numeri di Fibonacci di posto dispari



$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

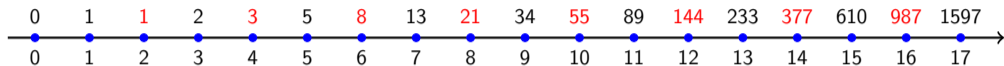
Dimostrazione: Esprimiamo ogni termine come differenza tra due termini successivi:

$$\begin{array}{ll} F_1 = F_2 = 1 & \dots \\ F_3 = F_4 - F_2 & \dots \\ F_5 = F_6 - F_4 & F_{2n-3} = F_{2n-2} - F_{2n-4} \\ F_7 = F_8 - F_6 & F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2} \end{array}$$

Sommando membro a membro, si ottiene una somma telescopica:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Proprietà 2: Somma dei primi n numeri di Fibonacci di posto dispari



$$F_2 + F_4 + F_6 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

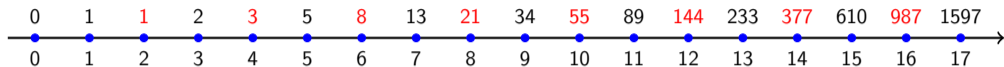
Dimostrazione: Esprimiamo ogni termine come differenza tra due termini successivi:

$$\begin{array}{ll} F_1 = F_2 = 1 & \dots \\ F_3 = F_4 - F_2 & \dots \\ F_5 = F_6 - F_4 & F_{2n-3} = F_{2n-2} - F_{2n-4} \\ F_7 = F_8 - F_6 & F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2} \end{array}$$

Sommando membro a membro, si ottiene una somma telescopica:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$$

Proprietà 3: Somma dei primi n numeri di Fibonacci di posto pari



$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

Dimostrazione: Per la Proprietà 1 abbiamo:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

che possiamo scrivere

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1$$

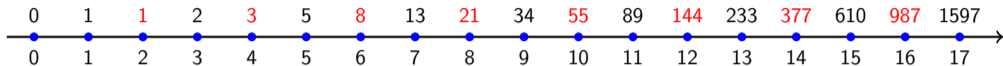
e per la Proprietà 2

$$F_{2n} + (F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n}) = F_{2n+2} - 1$$

ossia

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 - F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

Proprietà 3: Somma dei primi n numeri di Fibonacci di posto pari



$$F_1 + F_3 + F_5 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

Dimostrazione: Per la Proprietà 1 abbiamo:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$$

che possiamo scrivere

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} + F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1$$

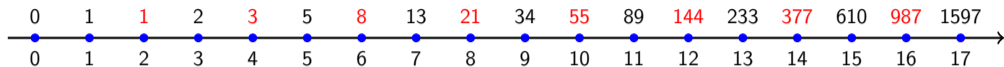
e per la Proprietà 2

$$F_{2n} + (F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n}) = F_{2n+2} - 1$$

ossia

$$F_2 + F_4 + \cdots + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 - F_{2n} = F_{2n+1} - 1$$

Proprietà 4: Somma dei quadrati dei primi n numeri di Fibonacci



$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Dimostrazione: Osserviamo che

$$F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k = F_k (F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k^2, \text{ per } k \geq 2$$

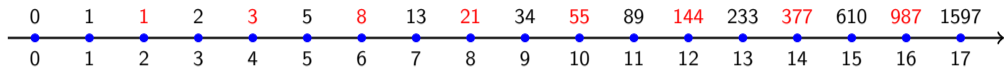
Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} F_1^2 &= F_1 F_2 & \dots \\ F_2^2 &= F_2 F_3 - F_1 F_2 & F_{n-1}^2 &= F_{n-1} F_n - F_{n-2} F_{n-1} \\ F_3^2 &= F_3 F_4 - F_2 F_3 & F_n^2 &= F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n \end{aligned}$$

che sommate membro a membro danno

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Proprietà 4: Somma dei quadrati dei primi n numeri di Fibonacci



$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Dimostrazione: Osserviamo che

$$F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k = F_k (F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k^2, \text{ per } k \geq 2$$

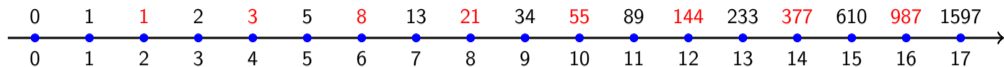
Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} F_1^2 &= F_1 F_2 & \dots \\ F_2^2 &= F_2 F_3 - F_1 F_2 & F_{n-1}^2 &= F_{n-1} F_n - F_{n-2} F_{n-1} \\ F_3^2 &= F_3 F_4 - F_2 F_3 & F_n^2 &= F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n \end{aligned}$$

che sommate membro a membro danno

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Proprietà 4: Somma dei quadrati dei primi n numeri di Fibonacci



$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Dimostrazione: Osserviamo che

$$F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k = F_k (F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k^2, \text{ per } k \geq 2$$

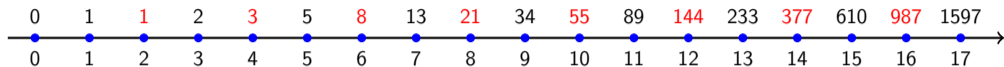
Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} F_1^2 &= F_1 F_2 & \dots \\ F_2^2 &= F_2 F_3 - F_1 F_2 & F_{n-1}^2 &= F_{n-1} F_n - F_{n-2} F_{n-1} \\ F_3^2 &= F_3 F_4 - F_2 F_3 & F_n^2 &= F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n \end{aligned}$$

che sommate membro a membro danno

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Proprietà 4: Somma dei quadrati dei primi n numeri di Fibonacci



$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Dimostrazione: Osserviamo che

$$F_k F_{k+1} - F_{k-1} F_k = F_k (F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k^2, \text{ per } k \geq 2$$

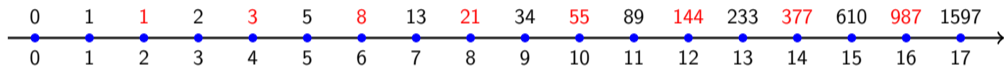
Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} F_1^2 &= F_1 F_2 & \dots \\ F_2^2 &= F_2 F_3 - F_1 F_2 & F_{n-1}^2 &= F_{n-1} F_n - F_{n-2} F_{n-1} \\ F_3^2 &= F_3 F_4 - F_2 F_3 & F_n^2 &= F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n \end{aligned}$$

che sommate membro a membro danno

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

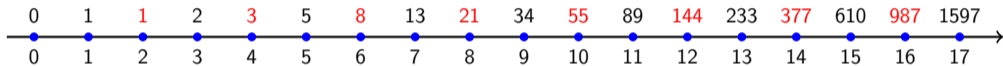
Proprietà 5: Termine F_{n+m}



$$F_{m+n} = F_{m-1} F_n + F_m F_{n+1}$$

Dimostrazione: per induzione su n

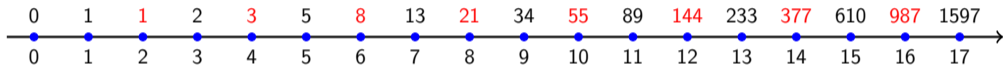
Proprietà 5: Termine F_{n+m}



$$F_{m+n} = F_{m-1} F_n + F_m F_{n+1}$$

Dimostrazione: per induzione su n

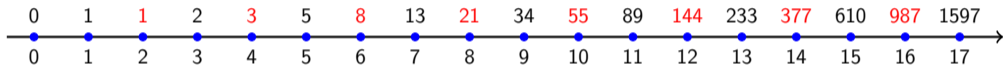
Proprietà 6: Quadrato del termine n -esimo: F_n^2



$$F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Dimostrazione: per induzione su n

Proprietà 6: Quadrato del termine n -esimo: F_n^2



$$F_n^2 = F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Dimostrazione: per induzione su n

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

Dato un numero naturale n , eseguiamo la somma dei quadrati delle cifre ripetutamente,

si arriva a 1 oppure a 89

Esempio

$n = 341$

$$3^2 + 4^2 + 1 = 26 \rightarrow 2^2 + 6^2 = 40 \rightarrow 4^2 + 0^2 = 16 \\ \rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \rightarrow 5^2 + 8^2 = 89$$

$$3^2 + 4^2 + 1 = 26 \rightarrow 2^2 + 6^2 = 40 \rightarrow 4^2 + 0^2 = 16 \\ \rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \rightarrow 5^2 + 8^2 = 89$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

Dato un numero naturale n , eseguiamo la somma dei quadrati delle cifre ripetutamente, si arriva a 1 oppure a 89

Esempio

$$n = 341$$

$$3^2 + 4^2 + 1 = 26 \rightarrow 2^2 + 6^2 = 40 \rightarrow 4^2 + 0^2 = 16 \\ \rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \rightarrow 5^2 + 8^2 = 89$$

$$3^2 + 4^2 + 1 = 26 \rightarrow 2^2 + 6^2 = 40 \rightarrow 4^2 + 0^2 = 16 \\ \rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \rightarrow 5^2 + 8^2 = 89$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

Dato un numero naturale n , eseguiamo la somma dei quadrati delle cifre ripetutamente, si arriva a 1 oppure a 89

Esempio

$$n = 341$$

$$3^2 + 4^2 + 1 = 26 \rightarrow 2^2 + 6^2 = 40 \rightarrow 4^2 + 0^2 = 16 \\ \rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \rightarrow 5^2 + 8^2 = 89$$

$$3^2 + 4^2 + 1 = 26 \rightarrow 2^2 + 6^2 = 40 \rightarrow 4^2 + 0^2 = 16 \\ \rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \rightarrow 5^2 + 8^2 = 89$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

Dato un numero naturale n , eseguiamo la somma dei quadrati delle cifre ripetutamente, si arriva a 1 oppure a 89

Esempio

$$n = 341$$

$$3^2 + 4^2 + 1 = 26 \rightarrow 2^2 + 6^2 = 40 \rightarrow 4^2 + 0^2 = 16 \\ \rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \rightarrow 5^2 + 8^2 = 89$$

$$3^2 + 4^2 + 1 = 26 \rightarrow 2^2 + 6^2 = 40 \rightarrow 4^2 + 0^2 = 16 \\ \rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \rightarrow 5^2 + 8^2 = 89$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

- ▶ $100 = 89 + 10 + 1$
- ▶ $100 = 10^2 = 89 \cdot (1) + 1 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^3 = 89 \cdot (1 \cdot 10 + 1) + 2 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^4 = 89 \cdot (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2) + 3 \cdot 10 + 2$
- ▶ $10^5 = 89 \cdot (1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) + 5 \cdot 10 + 3$
- ▶ $10^6 = 89 \cdot (1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5) + 8 \cdot 10 + 5$
- ▶ $10^7 = 89 \cdot (1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8) + 13 \cdot 10 + 8$
- ▶ ...
- ▶

$$10^n = 89 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} F_k \cdot 10^{n-1-k} + (F_n \cdot 10 + F_{n-1}), \text{ per ogni } n \geq 2$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

- ▶ $100 = 89 + 10 + 1$
- ▶ $100 = 10^2 = 89 \cdot (1) + 1 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^3 = 89 \cdot (1 \cdot 10 + 1) + 2 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^4 = 89 \cdot (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2) + 3 \cdot 10 + 2$
- ▶ $10^5 = 89 \cdot (1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) + 5 \cdot 10 + 3$
- ▶ $10^6 = 89 \cdot (1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5) + 8 \cdot 10 + 5$
- ▶ $10^7 = 89 \cdot (1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8) + 13 \cdot 10 + 8$
- ▶ ...
- ▶

$$10^n = 89 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} F_k \cdot 10^{n-1-k} + (F_n \cdot 10 + F_{n-1}), \text{ per ogni } n \geq 2$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

- ▶ $100 = 89 + 10 + 1$
- ▶ $100 = 10^2 = 89 \cdot (1) + 1 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^3 = 89 \cdot (1 \cdot 10 + 1) + 2 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^4 = 89 \cdot (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2) + 3 \cdot 10 + 2$
- ▶ $10^5 = 89 \cdot (1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) + 5 \cdot 10 + 3$
- ▶ $10^6 = 89 \cdot (1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5) + 8 \cdot 10 + 5$
- ▶ $10^7 = 89 \cdot (1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8) + 13 \cdot 10 + 8$
- ▶ ...
- ▶

$$10^n = 89 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} F_k \cdot 10^{n-1-k} + (F_n \cdot 10 + F_{n-1}), \text{ per ogni } n \geq 2$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

- ▶ $100 = 89 + 10 + 1$
- ▶ $100 = 10^2 = 89 \cdot (1) + 1 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^3 = 89 \cdot (1 \cdot 10 + 1) + 2 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^4 = 89 \cdot (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2) + 3 \cdot 10 + 2$
- ▶ $10^5 = 89 \cdot (1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) + 5 \cdot 10 + 3$
- ▶ $10^6 = 89 \cdot (1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5) + 8 \cdot 10 + 5$
- ▶ $10^7 = 89 \cdot (1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8) + 13 \cdot 10 + 8$
- ▶ ...
- ▶

$$10^n = 89 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} F_k \cdot 10^{n-1-k} + (F_n \cdot 10 + F_{n-1}), \text{ per ogni } n \geq 2$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

- ▶ $100 = 89 + 10 + 1$
- ▶ $100 = 10^2 = 89 \cdot (1) + 1 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^3 = 89 \cdot (1 \cdot 10 + 1) + 2 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^4 = 89 \cdot (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2) + 3 \cdot 10 + 2$
- ▶ $10^5 = 89 \cdot (1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) + 5 \cdot 10 + 3$
- ▶ $10^6 = 89 \cdot (1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5) + 8 \cdot 10 + 5$
- ▶ $10^7 = 89 \cdot (1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8) + 13 \cdot 10 + 8$
- ▶ ...
- ▶

$$10^n = 89 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} F_k \cdot 10^{n-1-k} + (F_n \cdot 10 + F_{n-1}), \text{ per ogni } n \geq 2$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

- ▶ $100 = 89 + 10 + 1$
- ▶ $100 = 10^2 = 89 \cdot (1) + 1 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^3 = 89 \cdot (1 \cdot 10 + 1) + 2 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^4 = 89 \cdot (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2) + 3 \cdot 10 + 2$
- ▶ $10^5 = 89 \cdot (1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) + 5 \cdot 10 + 3$
- ▶ $10^6 = 89 \cdot (1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5) + 8 \cdot 10 + 5$
- ▶ $10^7 = 89 \cdot (1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8) + 13 \cdot 10 + 8$
- ▶ ...
- ▶

$$10^n = 89 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} F_k \cdot 10^{n-1-k} + (F_n \cdot 10 + F_{n-1}), \text{ per ogni } n \geq 2$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

- ▶ $100 = 89 + 10 + 1$
- ▶ $100 = 10^2 = 89 \cdot (1) + 1 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^3 = 89 \cdot (1 \cdot 10 + 1) + 2 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^4 = 89 \cdot (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2) + 3 \cdot 10 + 2$
- ▶ $10^5 = 89 \cdot (1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) + 5 \cdot 10 + 3$
- ▶ $10^6 = 89 \cdot (1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5) + 8 \cdot 10 + 5$
- ▶ $10^7 = 89 \cdot (1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8) + 13 \cdot 10 + 8$

▶ ...

▶

$$10^n = 89 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} F_k \cdot 10^{n-1-k} + (F_n \cdot 10 + F_{n-1}), \text{ per ogni } n \geq 2$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

- ▶ $100 = 89 + 10 + 1$
- ▶ $100 = 10^2 = 89 \cdot (1) + 1 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^3 = 89 \cdot (1 \cdot 10 + 1) + 2 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^4 = 89 \cdot (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2) + 3 \cdot 10 + 2$
- ▶ $10^5 = 89 \cdot (1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) + 5 \cdot 10 + 3$
- ▶ $10^6 = 89 \cdot (1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5) + 8 \cdot 10 + 5$
- ▶ $10^7 = 89 \cdot (1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8) + 13 \cdot 10 + 8$
- ▶ ...



$$10^n = 89 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} F_k \cdot 10^{n-1-k} + (F_n \cdot 10 + F_{n-1}), \text{ per ogni } n \geq 2$$

L'undicesimo numero di Fibonacci: $F_{11} = 89$

- ▶ $100 = 89 + 10 + 1$
- ▶ $100 = 10^2 = 89 \cdot (1) + 1 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^3 = 89 \cdot (1 \cdot 10 + 1) + 2 \cdot 10 + 1$
- ▶ $10^4 = 89 \cdot (1 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10 + 2) + 3 \cdot 10 + 2$
- ▶ $10^5 = 89 \cdot (1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 3) + 5 \cdot 10 + 3$
- ▶ $10^6 = 89 \cdot (1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5) + 8 \cdot 10 + 5$
- ▶ $10^7 = 89 \cdot (1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 8) + 13 \cdot 10 + 8$
- ▶ ...
- ▶

$$10^n = 89 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} F_k \cdot 10^{n-1-k} + (F_n \cdot 10 + F_{n-1}), \text{ per ogni } n \geq 2$$

Il rapporto aureo

Il “rapporto aureo” (ingl. *golden ratio*) è il rapporto tra due grandezze omogenee (in origine, due segmenti) tali che la minore delle due sia media proporzionale tra la maggiore e la loro differenza (o, equivalentemente, la maggiore sia media proporzionale tra la somma e la minore).

Il rapporto aureo viene tradizionalmente indicato con la lettera greca ϕ o Φ .

Se

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \text{ o equivalentemente } \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

allora a e b stanno tra loro nel rapporto aureo

$$\frac{a}{b} = \phi.$$



Il rapporto aureo

Il “rapporto aureo” (ingl. *golden ratio*) è il rapporto tra due grandezze omogenee (in origine, due segmenti) tali che la minore delle due sia media proporzionale tra la maggiore e la loro differenza (o, equivalentemente, la maggiore sia media proporzionale tra la somma e la minore).

Il rapporto aureo viene tradizionalmente indicato con la lettera greca ϕ o Φ .

Se

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \text{ o equivalentemente } \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

allora a e b stanno tra loro nel rapporto aureo

$$\frac{a}{b} = \phi.$$



Il rapporto aureo ϕ (lettera greca “phi”, forse in onore di Fidìa)

Il numero che esprime il rapporto aureo è la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado che si ricava dalla proporzione (similitudine tra due rettangoli):

$$(a + b) : a = a : b$$

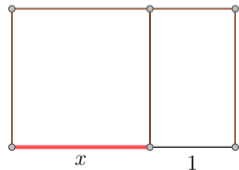
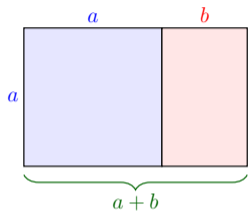
Ponendo $a = x$ e $b = 1$ (unità di misura), si ha:

$$(x + 1) : x = x : 1$$

$$x^2 = x + 1$$

ossia, l'equazione:

$$x^2 - x - 1 = 0$$



Il rapporto aureo ϕ (lettera greca “phi”, forse in onore di Fidìa)

Il numero che esprime il rapporto aureo è la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado che si ricava dalla proporzione (similitudine tra due rettangoli):

$$(a + b) : a = a : b$$

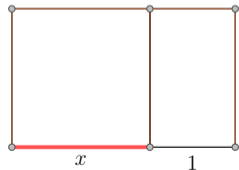
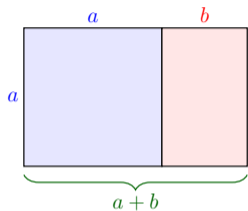
Ponendo $a = x$ e $b = 1$ (unità di misura), si ha:

$$(x + 1) : x = x : 1$$

$$x^2 = x + 1$$

ossia, l'equazione:

$$x^2 - x - 1 = 0$$



Il rapporto aureo ϕ (lettera greca “phi”, forse in onore di Fidìa)

Il numero che esprime il rapporto aureo è la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado che si ricava dalla proporzione (similitudine tra due rettangoli):

$$(a + b) : a = a : b$$

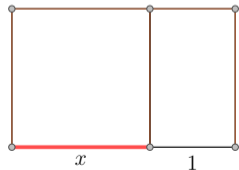
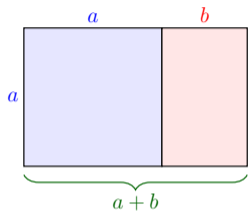
Ponendo $a = x$ e $b = 1$ (unità di misura), si ha:

$$(x + 1) : x = x : 1$$

$$x^2 = x + 1$$

ossia, l'equazione:

$$x^2 - x - 1 = 0$$



Il rapporto aureo ϕ (lettera greca “phi”, forse in onore di Fidìa)

Il numero che esprime il rapporto aureo è la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado che si ricava dalla proporzione (similitudine tra due rettangoli):

$$(a + b) : a = a : b$$

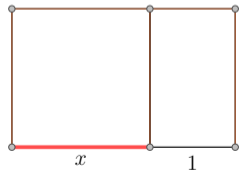
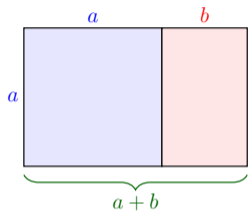
Ponendo $a = x$ e $b = 1$ (unità di misura), si ha:

$$(x + 1) : x = x : 1$$

$$x^2 = x + 1$$

ossia, l'equazione:

$$x^2 - x - 1 = 0$$



Il rapporto aureo ϕ (lettera greca “phi”, forse in onore di Fidìa)

Il numero che esprime il rapporto aureo è la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado che si ricava dalla proporzione (similitudine tra due rettangoli):

$$(a + b) : a = a : b$$

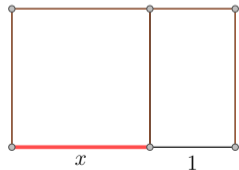
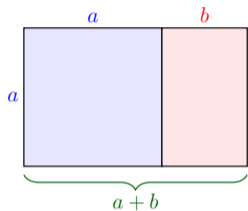
Ponendo $a = x$ e $b = 1$ (unità di misura), si ha:

$$(x + 1) : x = x : 1$$

$$x^2 = x + 1$$

ossia, l'equazione:

$$x^2 - x - 1 = 0$$



Il rapporto aureo ϕ (lettera greca “phi”, forse in onore di Fidìa)

Il numero che esprime il rapporto aureo è la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado che si ricava dalla proporzione (similitudine tra due rettangoli):

$$(a + b) : a = a : b$$

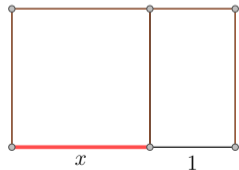
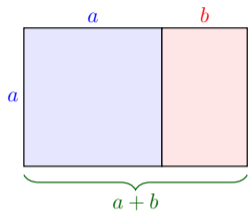
Ponendo $a = x$ e $b = 1$ (unità di misura), si ha:

$$(x + 1) : x = x : 1$$

$$x^2 = x + 1$$

ossia, l'equazione:

$$x^2 - x - 1 = 0$$



Il rapporto aureo ϕ (lettera greca “phi”, forse in onore di Fidìa)

Il numero che esprime il rapporto aureo è la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado che si ricava dalla proporzione: $(x + 1) : x = x : 1$, ponendo $a = x$ e $b = 1$: $x^2 = x + 1$, ossia, $x^2 - x - 1 = 0$, e vale

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618\,033\,988\,749 \dots$$

Da $\phi^2 = \phi + 1$, derivano anche

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}} = \dots$$

e anche

$$\phi = \sqrt{1 + \phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}} = \sqrt{1 + \phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}} = \dots$$

Il rapporto aureo ϕ

Abbiamo visto che si può scrivere

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}}} = \dots$$

Quest'ultima relazione, al limite, diventa una frazione continua (“infinita” e periodica).

Il numero ϕ scritto come frazione continua

Lo sviluppo di ϕ in frazione continua (infinita e periodica) è il seguente:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}$$

ossia

$$\phi = [1; \bar{1}].$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ϕ

Partendo dalla relazione fondamentale:

$$\phi^2 = \phi + 1 = -1\phi + 1 \quad (*)$$

Possiamo ricavare le potenze successive moltiplicando ripetutamente per ϕ :

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi \cdot \phi^3 = \phi^3 + \phi^2 = (2\phi + 1) + \phi + 1 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi \cdot \phi^4 = \phi^4 + \phi^3 = (3\phi + 2) + 2\phi + 1 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi \cdot \phi^5 = \phi^5 + \phi^4 = (5\phi + 3) + 3\phi + 2 = 8\phi + 5$$

... e così via (la validità generale si dimostra per **induzione**).

In generale, per ogni $n > 1$:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ϕ

Partendo dalla relazione fondamentale:

$$\phi^2 = \phi + 1 = -1\phi + 1 \quad (*)$$

Possiamo ricavare le potenze successive moltiplicando ripetutamente per ϕ :

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi \cdot \phi^3 = \phi^3 + \phi^2 = (2\phi + 1) + \phi + 1 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi \cdot \phi^4 = \phi^4 + \phi^3 = (3\phi + 2) + 2\phi + 1 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi \cdot \phi^5 = \phi^5 + \phi^4 = (5\phi + 3) + 3\phi + 2 = 8\phi + 5$$

... e così via (la validità generale si dimostra per **induzione**).

In generale, per ogni $n > 1$:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ϕ

Partendo dalla relazione fondamentale:

$$\phi^2 = \phi + 1 = -1\phi + 1 \quad (*)$$

Possiamo ricavare le potenze successive moltiplicando ripetutamente per ϕ :

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi \cdot \phi^3 = \phi^3 + \phi^2 = (2\phi + 1) + \phi + 1 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi \cdot \phi^4 = \phi^4 + \phi^3 = (3\phi + 2) + 2\phi + 1 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi \cdot \phi^5 = \phi^5 + \phi^4 = (5\phi + 3) + 3\phi + 2 = 8\phi + 5$$

... e così via (la validità generale si dimostra per **induzione**).

In generale, per ogni $n > 1$:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ϕ

Partendo dalla relazione fondamentale:

$$\phi^2 = \phi + 1 = -1\phi + 1 \quad (*)$$

Possiamo ricavare le potenze successive moltiplicando ripetutamente per ϕ :

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi \cdot \phi^3 = \phi^3 + \phi^2 = (2\phi + 1) + \phi + 1 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi \cdot \phi^4 = \phi^4 + \phi^3 = (3\phi + 2) + 2\phi + 1 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi \cdot \phi^5 = \phi^5 + \phi^4 = (5\phi + 3) + 3\phi + 2 = 8\phi + 5$$

... e così via (la validità generale si dimostra per **induzione**).

In generale, per ogni $n > 1$:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ϕ

Partendo dalla relazione fondamentale:

$$\phi^2 = \phi + 1 = -1\phi + 1 \quad (*)$$

Possiamo ricavare le potenze successive moltiplicando ripetutamente per ϕ :

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi \cdot \phi^3 = \phi^3 + \phi^2 = (2\phi + 1) + \phi + 1 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi \cdot \phi^4 = \phi^4 + \phi^3 = (3\phi + 2) + 2\phi + 1 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi \cdot \phi^5 = \phi^5 + \phi^4 = (5\phi + 3) + 3\phi + 2 = 8\phi + 5$$

... e così via (la validità generale si dimostra per **induzione**).

In generale, per ogni $n > 1$:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ϕ

Partendo dalla relazione fondamentale:

$$\phi^2 = \phi + 1 = -1\phi + 1 \quad (*)$$

Possiamo ricavare le potenze successive moltiplicando ripetutamente per ϕ :

$$\phi^3 = \phi \cdot \phi^2 = \phi(\phi + 1) = \phi^2 + \phi = (\phi + 1) + \phi = 2\phi + 1$$

$$\phi^4 = \phi \cdot \phi^3 = \phi^3 + \phi^2 = (2\phi + 1) + \phi + 1 = 3\phi + 2$$

$$\phi^5 = \phi \cdot \phi^4 = \phi^4 + \phi^3 = (3\phi + 2) + 2\phi + 1 = 5\phi + 3$$

$$\phi^6 = \phi \cdot \phi^5 = \phi^5 + \phi^4 = (5\phi + 3) + 3\phi + 2 = 8\phi + 5$$

... e così via (la validità generale si dimostra per **induzione**).

In generale, per ogni $n > 1$:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ψ

Le stesse proprietà valgono per l'altra radice:

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$$

infatti si ha, partendo dalla relazione fondamentale:

$$\psi^2 = \psi + 1 = \mathbf{1}\psi + \mathbf{1}, \quad (*)$$

$$\psi^3 = \psi \cdot \psi^2 = \psi(\psi + 1) = \psi^2 + \psi = (\psi + 1) + \psi = \mathbf{2}\psi + \mathbf{1}$$

$$\psi^4 = \psi \cdot \psi^3 = \psi^3 + \psi^2 = (2\psi + 1) + \psi + 1 = \mathbf{3}\psi + \mathbf{2}$$

$$\psi^5 = \psi \cdot \psi^4 = \psi^4 + \psi^3 = (3\psi + 2) + 2\psi + 1 = \mathbf{5}\psi + \mathbf{3}$$

$$\psi^6 = \psi \cdot \psi^5 = \psi^5 + \psi^4 = (5\psi + 3) + 3\psi + 2 = \mathbf{8}\psi + \mathbf{5}$$

e così via ... In generale, per ogni $n > 1$ si ha:

$$\psi^n = \mathbf{F}_n \psi + \mathbf{F}_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ψ

Le stesse proprietà valgono per l'altra radice:

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$$

infatti si ha, partendo dalla relazione fondamentale:

$$\psi^2 = \psi + 1 = \mathbf{1}\psi + \mathbf{1}, \quad (*)$$

$$\psi^3 = \psi \cdot \psi^2 = \psi(\psi + 1) = \psi^2 + \psi = (\psi + 1) + \psi = \mathbf{2}\psi + \mathbf{1}$$

$$\psi^4 = \psi \cdot \psi^3 = \psi^3 + \psi^2 = (2\psi + 1) + \psi + 1 = \mathbf{3}\psi + \mathbf{2}$$

$$\psi^5 = \psi \cdot \psi^4 = \psi^4 + \psi^3 = (3\psi + 2) + 2\psi + 1 = \mathbf{5}\psi + \mathbf{3}$$

$$\psi^6 = \psi \cdot \psi^5 = \psi^5 + \psi^4 = (5\psi + 3) + 3\psi + 2 = \mathbf{8}\psi + \mathbf{5}$$

e così via ... In generale, per ogni $n > 1$ si ha:

$$\psi^n = \mathbf{F}_n \psi + \mathbf{F}_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ψ

Le stesse proprietà valgono per l'altra radice:

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$$

infatti si ha, partendo dalla relazione fondamentale:

$$\psi^2 = \psi + 1 = \mathbf{1}\psi + \mathbf{1}, \quad (*)$$

$$\psi^3 = \psi \cdot \psi^2 = \psi(\psi + 1) = \psi^2 + \psi = (\psi + 1) + \psi = \mathbf{2}\psi + \mathbf{1}$$

$$\psi^4 = \psi \cdot \psi^3 = \psi^3 + \psi^2 = (2\psi + 1) + \psi + 1 = \mathbf{3}\psi + \mathbf{2}$$

$$\psi^5 = \psi \cdot \psi^4 = \psi^4 + \psi^3 = (3\psi + 2) + 2\psi + 1 = \mathbf{5}\psi + \mathbf{3}$$

$$\psi^6 = \psi \cdot \psi^5 = \psi^5 + \psi^4 = (5\psi + 3) + 3\psi + 2 = \mathbf{8}\psi + \mathbf{5}$$

e così via ... In generale, per ogni $n > 1$ si ha:

$$\psi^n = F_n \psi + F_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ψ

Le stesse proprietà valgono per l'altra radice:

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$$

infatti si ha, partendo dalla relazione fondamentale:

$$\psi^2 = \psi + 1 = \mathbf{1}\psi + \mathbf{1}, \quad (*)$$

$$\psi^3 = \psi \cdot \psi^2 = \psi(\psi + 1) = \psi^2 + \psi = (\psi + 1) + \psi = \mathbf{2}\psi + \mathbf{1}$$

$$\psi^4 = \psi \cdot \psi^3 = \psi^3 + \psi^2 = (2\psi + 1) + \psi + 1 = \mathbf{3}\psi + \mathbf{2}$$

$$\psi^5 = \psi \cdot \psi^4 = \psi^4 + \psi^3 = (3\psi + 2) + 2\psi + 1 = \mathbf{5}\psi + \mathbf{3}$$

$$\psi^6 = \psi \cdot \psi^5 = \psi^5 + \psi^4 = (5\psi + 3) + 3\psi + 2 = \mathbf{8}\psi + \mathbf{5}$$

e così via ... In generale, per ogni $n > 1$ si ha:

$$\psi^n = F_n \psi + F_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ψ

Le stesse proprietà valgono per l'altra radice:

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$$

infatti si ha, partendo dalla relazione fondamentale:

$$\psi^2 = \psi + 1 = \mathbf{1}\psi + \mathbf{1}, \quad (*)$$

$$\psi^3 = \psi \cdot \psi^2 = \psi(\psi + 1) = \psi^2 + \psi = (\psi + 1) + \psi = \mathbf{2}\psi + \mathbf{1}$$

$$\psi^4 = \psi \cdot \psi^3 = \psi^3 + \psi^2 = (2\psi + 1) + \psi + 1 = \mathbf{3}\psi + \mathbf{2}$$

$$\psi^5 = \psi \cdot \psi^4 = \psi^4 + \psi^3 = (3\psi + 2) + 2\psi + 1 = \mathbf{5}\psi + \mathbf{3}$$

$$\psi^6 = \psi \cdot \psi^5 = \psi^5 + \psi^4 = (5\psi + 3) + 3\psi + 2 = \mathbf{8}\psi + \mathbf{5}$$

e così via ... In generale, per ogni $n > 1$ si ha:

$$\psi^n = F_n \psi + F_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ψ

Le stesse proprietà valgono per l'altra radice:

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$$

infatti si ha, partendo dalla relazione fondamentale:

$$\psi^2 = \psi + 1 = \mathbf{1}\psi + \mathbf{1}, \quad (*)$$

$$\psi^3 = \psi \cdot \psi^2 = \psi(\psi + 1) = \psi^2 + \psi = (\psi + 1) + \psi = \mathbf{2}\psi + \mathbf{1}$$

$$\psi^4 = \psi \cdot \psi^3 = \psi^3 + \psi^2 = (2\psi + 1) + \psi + 1 = \mathbf{3}\psi + \mathbf{2}$$

$$\psi^5 = \psi \cdot \psi^4 = \psi^4 + \psi^3 = (3\psi + 2) + 2\psi + 1 = \mathbf{5}\psi + \mathbf{3}$$

$$\psi^6 = \psi \cdot \psi^5 = \psi^5 + \psi^4 = (5\psi + 3) + 3\psi + 2 = \mathbf{8}\psi + \mathbf{5}$$

e così via ... In generale, per ogni $n > 1$ si ha:

$$\psi^n = \mathbf{F}_n \psi + \mathbf{F}_{n-1}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ψ

Abbiamo quindi ottenuto:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$$

Indicando con ψ la soluzione negativa di $x^2 - x - 1 = 0$, si ha analogamente:

$$\psi^n = F_n \psi + F_{n-1}$$

Sottraendo termine a termine, si ottiene:

$$\phi^n - \psi^n = F_n(\phi - \psi)$$

Osservando che $\phi - \psi = \sqrt{5}$, si ricava la famosa formula di Binet (Jacques-Philippe-Marie Binet, 1786-1856, matematico francese):

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ψ

Abbiamo quindi ottenuto:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$$

Indicando con ψ la soluzione negativa di $x^2 - x - 1 = 0$, si ha analogamente:

$$\psi^n = F_n \psi + F_{n-1}$$

Sottraendo termine a termine, si ottiene:

$$\phi^n - \psi^n = F_n(\phi - \psi)$$

Osservando che $\phi - \psi = \sqrt{5}$, si ricava la famosa formula di Binet (Jacques-Philippe-Marie Binet, 1786-1856, matematico francese):

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ψ

Abbiamo quindi ottenuto:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$$

Indicando con ψ la soluzione negativa di $x^2 - x - 1 = 0$, si ha analogamente:

$$\psi^n = F_n \psi + F_{n-1}$$

Sottraendo termine a termine, si ottiene:

$$\phi^n - \psi^n = F_n(\phi - \psi)$$

Osservando che $\phi - \psi = \sqrt{5}$, si ricava la famosa formula di Binet (Jacques-Philippe-Marie Binet, 1786-1856, matematico francese):

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

Alcune notevoli proprietà algebriche di ψ

Abbiamo quindi ottenuto:

$$\phi^n = F_n \phi + F_{n-1}$$

Indicando con ψ la soluzione negativa di $x^2 - x - 1 = 0$, si ha analogamente:

$$\psi^n = F_n \psi + F_{n-1}$$

Sottraendo termine a termine, si ottiene:

$$\phi^n - \psi^n = F_n(\phi - \psi)$$

Osservando che $\phi - \psi = \sqrt{5}$, si ricava la famosa formula di Binet (Jacques-Philippe-Marie Binet, 1786-1856, matematico francese):

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

Formula di Binet

Poiché le soluzioni dell'equazione $x^2 = x + 1$, sono $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e si ha $\phi - \psi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, sostituendo nella formule, si ha

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

ossia

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Formula di Binet

Poiché le soluzioni dell'equazione $x^2 = x + 1$, sono $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e si ha $\phi - \psi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$, sostituendo nella formule, si ha

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

ossia

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Derivazione della Formula di Binet

Vediamo ora un altro metodo per ottenere la formula di Binet facendo ricorso alla diagonalizzazione delle matrici. Qui può servire porre $F_0 = 0$. Poniamo:

$$B_k = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Risulta:

$$B_{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k-1} + F_k \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$$

e posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ possiamo scrivere:

$$B_{k+1} = AB_k$$

Derivazione della Formula di Binet

Vediamo ora un altro metodo per ottenere la formula di Binet facendo ricorso alla diagonalizzazione delle matrici. Qui può servire porre $F_0 = 0$. Poniamo:

$$B_k = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Risulta:

$$B_{k+1} = \begin{pmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{k-1} + F_k \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{pmatrix}$$

e posto $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ possiamo scrivere:

$$B_{k+1} = AB_k$$

Calcolo degli autovalori

Per trovare gli autovalori di A , risolviamo l'equazione caratteristica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Esplicitando il determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Applicando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Calcolo degli autovalori

Per trovare gli autovalori di A , risolviamo l'equazione caratteristica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Esplicitando il determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

Applicando la formula risolutiva per le equazioni di secondo grado:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Gli autovalori e il rapporto aureo

I due autovalori ottenuti sono:

- ▶ $\lambda_1 = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$ (Rapporto aureo)
- ▶ $\lambda_2 = \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$

Proprietà chiave:

- ▶ La matrice A è diagonalizzabile poiché ha due autovalori distinti.
- ▶ La formula di Binet emergerà dal calcolo di A^n , che dipende direttamente da queste potenze:

$$F_n = \frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Calcolo della Matrice P e risultato finale

Per esplicitare P , calcoliamo gli autovettori di A associati a $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (rapporto aureo ϕ) e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi$:

► La matrice degli autovettori è: $P = \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

► La sua inversa è necessaria per il calcolo di A^n : $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \phi \end{pmatrix}$

Conclusione: la formula di Binet

Sostituendo P, D^n, P^{-1} in A^n e considerando F_n come elemento del vettore risultante, si ottiene la celebre formula:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Calcolo della Matrice P e risultato finale

Per esplicitare P , calcoliamo gli autovettori di A associati a $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (rapporto aureo ϕ) e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi$:

- ▶ La matrice degli autovettori è: $P = \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ▶ La sua inversa è necessaria per il calcolo di A^n : $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \phi \end{pmatrix}$

Conclusione: la formula di Binet

Sostituendo P, D^n, P^{-1} in A^n e considerando F_n come elemento del vettore risultante, si ottiene la celebre formula:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Calcolo della Matrice P e risultato finale

Per esplicitare P , calcoliamo gli autovettori di A associati a $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (rapporto aureo ϕ) e $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \psi$:

- ▶ La matrice degli autovettori è: $P = \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ▶ La sua inversa è necessaria per il calcolo di A^n : $P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \phi \end{pmatrix}$

Conclusione: la formula di Binet

Sostituendo P, D^n, P^{-1} in A^n e considerando F_n come elemento del vettore risultante, si ottiene la celebre formula:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Passaggi algebrici: dal prodotto alla formula di Binet

Sappiamo che $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$. Con $F_1 = 1$ e $F_0 = 0$, ci serve solo la prima colonna di A^n :

1. **Calcolo del prodotto PD^n :**

$$PD^n = \begin{pmatrix} \phi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^n & 0 \\ 0 & \psi^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^{n+1} & \psi^{n+1} \\ \phi^n & \psi^n \end{pmatrix}$$

2. **Prodotto finale $A^n = (PD^n)P^{-1}$:** Ricordando che $\det(P) = \phi - \psi = \sqrt{5}$:

$$A^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \phi^{n+1} & \psi^{n+1} \\ \phi^n & \psi^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \phi \end{pmatrix}$$

3. **Estrazione di F_n :** Dalla relazione $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, F_n è l'elemento in basso a sinistra:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n \cdot 1 + \psi^n \cdot (-1)) = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

Calcolo di A^n tramite diagonalizzazione

Sappiamo che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ può essere scritta come $A = PDP^{-1}$, dove:

- ▶ $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ è la matrice diagonale degli autovalori.
- ▶ P è la matrice degli autovettori corrispondenti.

L'utilità della diagonalizzazione risiede nel calcolo delle potenze:

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Poiché la successione di Fibonacci è definita dal vettore $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$,
otteniamo la formula chiusa.

Calcolo di A^n tramite diagonalizzazione

Sappiamo che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ può essere scritta come $A = PDP^{-1}$, dove:

- ▶ $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ è la matrice diagonale degli autovalori.
- ▶ P è la matrice degli autovettori corrispondenti.

L'utilità della diagonalizzazione risiede nel calcolo delle potenze:

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Poiché la successione di Fibonacci è definita dal vettore $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$,
otteniamo la formula chiusa.

Calcolo di A^n tramite diagonalizzazione

Sappiamo che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ può essere scritta come $A = PDP^{-1}$, dove:

- ▶ $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ è la matrice diagonale degli autovalori.
- ▶ P è la matrice degli autovettori corrispondenti.

L'utilità della diagonalizzazione risiede nel calcolo delle potenze:

$$A^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Poiché la successione di Fibonacci è definita dal vettore $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}$,
otteniamo la formula chiusa.

La Formula di Binet

Sostituendo i valori $\lambda_1 = \phi$ e $\lambda_2 = \psi$, otteniamo la celebre **Formula di Binet**:

Risultato Finale

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Osservazione interessante: Siccome $|\psi| < 1$, il termine ψ^n tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Questo implica che:

$$F_n \approx \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

ovvero, F_n è l'intero più vicino a $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$.

La Formula di Binet

Sostituendo i valori $\lambda_1 = \phi$ e $\lambda_2 = \psi$, otteniamo la celebre **Formula di Binet**:

Risultato Finale

$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\phi - \psi} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

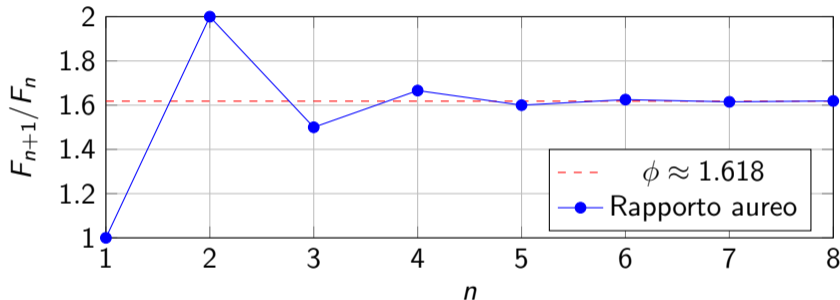
Osservazione interessante: Siccome $|\psi| < 1$, il termine ψ^n tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Questo implica che:

$$F_n \approx \frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$$

ovvero, F_n è l'intero più vicino a $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$.

Convergenza del Rapporto F_{n+1}/F_n

Al crescere di n , il rapporto tra due termini successivi tende alla sezione aurea $\phi \approx 1,618$.

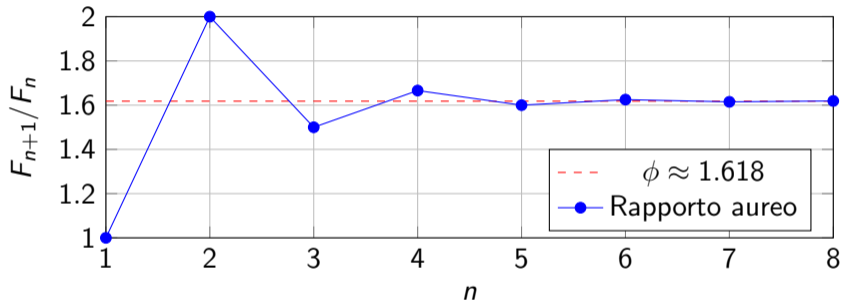


Interpretazione

L'oscillazione sopra e sotto la linea rossa è dovuta al termine ψ^n nella formula di Binet, che cambia segno se n è pari o dispari.

Convergenza del Rapporto F_{n+1}/F_n

Al crescere di n , il rapporto tra due termini successivi tende alla sezione aurea $\phi \approx 1,618$.



Interpretazione

L'oscillazione sopra e sotto la linea rossa è dovuta al termine ψ^n nella formula di Binet, che cambia segno se n è pari o dispari.

Il limite del rapporto tra F_{n+1} e F_n

Dalla formula di Binet, possiamo ricavare

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\phi^{n+1} + \psi^{n+1}}{\phi^n - \psi^n}$$

Dividendo per ϕ^n al numeratore e al denominatore, si ottiene:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi \frac{1 - \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n}$$

e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$, perché $-1 < \frac{\psi}{\phi} < 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n = 0$.

Il limite del rapporto tra F_{n+1} e F_n

Dalla formula di Binet, possiamo ricavare

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\phi^{n+1} + \psi^{n+1}}{\phi^n - \psi^n}$$

Dividendo per ϕ^n al numeratore e al denominatore, si ottiene:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi \frac{1 - \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n}$$

e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$, perché $-1 < \frac{\psi}{\phi} < 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n = 0$.

Il limite del rapporto tra F_{n+1} e F_n

Dalla formula di Binet, possiamo ricavare

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\phi^{n+1} + \psi^{n+1}}{\phi^n - \psi^n}$$

Dividendo per ϕ^n al numeratore e al denominatore, si ottiene:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi \frac{1 - \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n}$$

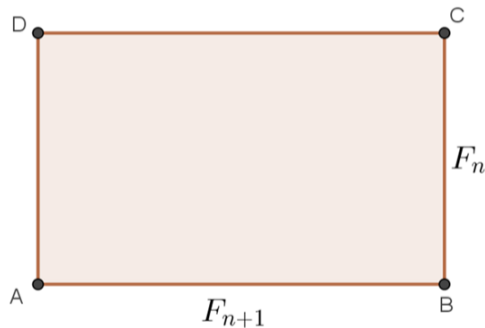
e quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$, perché $-1 < \frac{\psi}{\phi} < 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\psi}{\phi}\right)^n = 0$.

Significato geometrico del limite del rapporto tra F_{n+1} e F_n

Il limite visto precedentemente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

ha il seguente significato geometrico:
il rettangolo che ha per lati F_{n+1} e F_n tende a diventare un **rettangolo aureo**

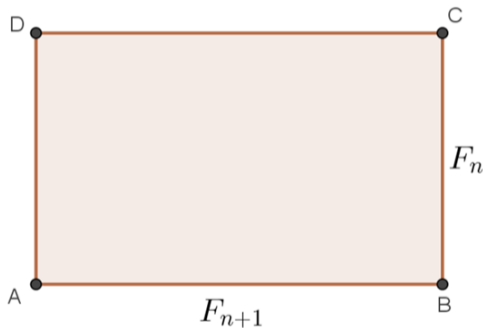


Significato geometrico del limite del rapporto tra F_{n+1} e F_n

Il limite visto precedentemente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

ha il seguente significato geometrico:
il rettangolo che ha per lati F_{n+1} e F_n tende a diventare un **rettangolo aureo**

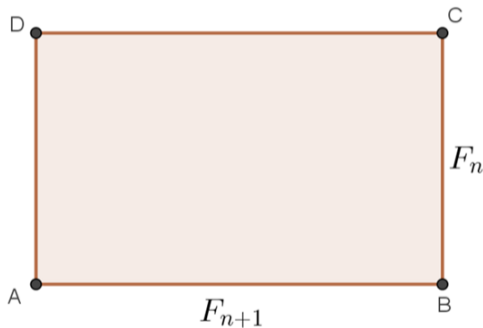


Significato geometrico del limite del rapporto tra F_{n+1} e F_n

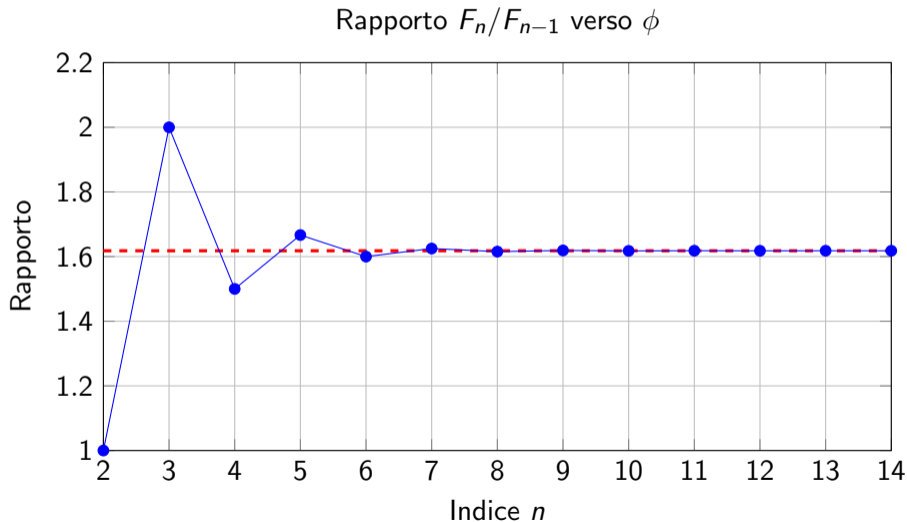
Il limite visto precedentemente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

ha il seguente significato geometrico:
il rettangolo che ha per lati F_{n+1} e F_n tende a diventare un **rettangolo aureo**



Visualizzazione della convergenza di F_n/F_{n-1} verso ϕ



Perché il grafico oscilla?

L'andamento a "zig-zag" visibile nel grafico, dove i rapporti sono alternativamente maggiori e minori di ϕ , è dovuto alla presenza della seconda radice dell'equazione $x^2 = x + 1$.

Come visto nella Formula di Binet, il comportamento della successione dipende da:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \quad \text{e} \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,618$$

Mentre ϕ è maggiore di 1 e domina la crescita della successione, la seconda radice ψ è negativa e ha un valore assoluto minore di 1 ($|\psi| < 1$).

Nello sviluppo matematico, il termine legato a ψ^n nella formula di Binet:

- ▶ Cambia segno a ogni passaggio (poiché una base negativa elevata a potenza pari diventa positiva e a potenza dispari resta negativa).
- ▶ Diventa sempre più piccolo man mano che n aumenta, poiché una frazione elevata a potenza tende a zero.

Animazione per il Fibonacci Day - November 23

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 1$



$$F_1 = 1$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 1$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 1$



$$F_1 = 1$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 1$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 1$



$$F_1 = 1$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 1$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 1$



$$F_1 = 1$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 1$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 1$



$$F_1 = 1$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 1$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 1$



$$F_1 = 1$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 1$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 1$



$$F_1 = 1$$

$$\frac{F_2}{F_1} = 1$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 2$



$$F_2 = 1$$

$$\frac{F_3}{F_2} = 2$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 2$



$$F_2 = 1$$

$$\frac{F_3}{F_2} = 2$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 2$



$$F_2 = 1$$

$$\frac{F_3}{F_2} = 2$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 3$



$$F_3 = 2$$

$$\frac{F_4}{F_3} = 1.5$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 3$



$$F_3 = 2$$

$$\frac{F_4}{F_3} = 1.5$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 3$



$$F_3 = 2$$

$$\frac{F_4}{F_3} = 1.5$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 4$



$$F_4 = 3$$

$$\frac{F_5}{F_4} = 1.6666666667$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 4$



$$F_4 = 3$$

$$\frac{F_5}{F_4} = 1.6666666667$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 4$



$$F_4 = 3$$

$$\frac{F_5}{F_4} = 1.6666666667$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 5$



$$F_5 = 5$$

$$\frac{F_6}{F_5} = 1.6$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 5$



$$F_5 = 5$$

$$\frac{F_6}{F_5} = 1.6$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 5$



$$F_5 = 5$$

$$\frac{F_6}{F_5} = 1.6$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 6$



$$F_6 = 8$$

$$\frac{F_7}{F_6} = 1.625$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 6$



$$F_6 = 8$$

$$\frac{F_7}{F_6} = 1.625$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 6$



$$F_6 = 8$$

$$\frac{F_7}{F_6} = 1.625$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 7$



$$F_7 = 13$$

$$\frac{F_8}{F_7} = 1.6153846154$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 7$



$$F_7 = 13$$

$$\frac{F_8}{F_7} = 1.6153846154$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 7$



$$F_7 = 13$$

$$\frac{F_8}{F_7} = 1.6153846154$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 8$



$$F_8 = 21$$

$$\frac{F_9}{F_8} = 1.619047619$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 8$



$$F_8 = 21$$

$$\frac{F_9}{F_8} = 1.619047619$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 8$



$$F_8 = 21$$

$$\frac{F_9}{F_8} = 1.619047619$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 9$



$$F_9 = 34$$

$$\frac{F_{10}}{F_9} = 1.6176470588$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 9$



$$F_9 = 34$$

$$\frac{F_{10}}{F_9} = 1.6176470588$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 9$



$$F_9 = 34$$

$$\frac{F_{10}}{F_9} = 1.6176470588$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 10$



$$F_{10} = 55$$

$$\frac{F_{11}}{F_{10}} = 1.6181818182$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 10



$$F_{10} = 55$$

$$\frac{F_{11}}{F_{10}} = 1.6181818182$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 10



$$F_{10} = 55$$

$$\frac{F_{11}}{F_{10}} = 1.6181818182$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 11$



$$F_{11} = 89$$

$$\frac{F_{12}}{F_{11}} = 1.6179775281$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 11$



$$F_{11} = 89$$

$$\frac{F_{12}}{F_{11}} = 1.6179775281$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 11$



$$F_{11} = 89$$

$$\frac{F_{12}}{F_{11}} = 1.6179775281$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 12$



$$F_{12} = 144$$

$$\frac{F_{13}}{F_{12}} = 1.6180555556$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 12$



$$F_{12} = 144$$

$$\frac{F_{13}}{F_{12}} = 1.6180555556$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 12$



$$F_{12} = 144$$

$$\frac{F_{13}}{F_{12}} = 1.6180555556$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 13$



$$F_{13} = 233$$

$$\frac{F_{14}}{F_{13}} = 1.6180257511$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 13$



$$F_{13} = 233$$

$$\frac{F_{14}}{F_{13}} = 1.6180257511$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 13$



$$F_{13} = 233$$

$$\frac{F_{14}}{F_{13}} = 1.6180257511$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 14$



$$F_{14} = 377$$

$$\frac{F_{15}}{F_{14}} = 1.6180371353$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 14$



$$F_{14} = 377$$

$$\frac{F_{15}}{F_{14}} = 1.6180371353$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 14$



$$F_{14} = 377$$

$$\frac{F_{15}}{F_{14}} = 1.6180371353$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 15



$$F_{15} = 610$$

$$\frac{F_{16}}{F_{15}} = 1.6180327869$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 15



$$F_{15} = 610$$

$$\frac{F_{16}}{F_{15}} = 1.6180327869$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 15$



$$F_{15} = 610$$

$$\frac{F_{16}}{F_{15}} = 1.6180327869$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 16$



$$F_{16} = 987$$

$$\frac{F_{17}}{F_{16}} = 1.6180344478$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 16$



$$F_{16} = 987$$

$$\frac{F_{17}}{F_{16}} = 1.6180344478$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 16$



$$F_{16} = 987$$

$$\frac{F_{17}}{F_{16}} = 1.6180344478$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 17$



$$F_{17} = 1597$$

$$\frac{F_{18}}{F_{17}} = 1.6180338134$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 17$



$$F_{17} = 1597$$

$$\frac{F_{18}}{F_{17}} = 1.6180338134$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”



$$F_{17} = 1597$$

$$\frac{F_{18}}{F_{17}} = 1.6180338134$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 18$



$$F_{18} = 2584$$

$$\frac{F_{19}}{F_{18}} = 1.6180340557$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 18$



$$F_{18} = 2584$$

$$\frac{F_{19}}{F_{18}} = 1.6180340557$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 18$



$$F_{18} = 2584$$

$$\frac{F_{19}}{F_{18}} = 1.6180340557$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 19



$$F_{19} = 4181$$

$$\frac{F_{20}}{F_{19}} = 1.6180339632$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 19



$$F_{19} = 4181$$

$$\frac{F_{20}}{F_{19}} = 1.6180339632$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 19



$$F_{19} = 4181$$

$$\frac{F_{20}}{F_{19}} = 1.6180339632$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 20



$$F_{20} = 6765$$

$$\frac{F_{21}}{F_{20}} = 1.6180339985$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 20



$$F_{20} = 6765$$

$$\frac{F_{21}}{F_{20}} = 1.6180339985$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 20



$$F_{20} = 6765$$

$$\frac{F_{21}}{F_{20}} = 1.6180339985$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 21$



$$F_{21} = 10946$$

$$\frac{F_{22}}{F_{21}} = 1.618033985$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 21$



$$F_{21} = 10946$$

$$\frac{F_{22}}{F_{21}} = 1.618033985$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 21$



$$F_{21} = 10946$$

$$\frac{F_{22}}{F_{21}} = 1.618033985$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 22$



$$F_{22} = 17711$$

$$\frac{F_{23}}{F_{22}} = 1.6180339902$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 22$



$$F_{22} = 17711$$

$$\frac{F_{23}}{F_{22}} = 1.6180339902$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 22$



$$F_{22} = 17711$$

$$\frac{F_{23}}{F_{22}} = 1.6180339902$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 23$



$$F_{23} = 28657$$

$$\frac{F_{24}}{F_{23}} = 1.6180339882$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 23$



$$F_{23} = 28657$$

$$\frac{F_{24}}{F_{23}} = 1.6180339882$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 23$



$$F_{23} = 28657$$

$$\frac{F_{24}}{F_{23}} = 1.6180339882$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 24$



$$F_{24} = 46368$$

$$\frac{F_{25}}{F_{24}} = 1.618033989$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 24$



$$F_{24} = 46368$$

$$\frac{F_{25}}{F_{24}} = 1.618033989$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 24$



$$F_{24} = 46368$$

$$\frac{F_{25}}{F_{24}} = 1.618033989$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 25$



$$F_{25} = 75025$$

$$\frac{F_{26}}{F_{25}} = 1.6180339887$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 25$



$$F_{25} = 75025$$

$$\frac{F_{26}}{F_{25}} = 1.6180339887$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 25$



$$F_{25} = 75025$$

$$\frac{F_{26}}{F_{25}} = 1.6180339887$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 26



$$F_{26} = 121393$$

$$\frac{F_{27}}{F_{26}} = 1.6180339888$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 26



$$F_{26} = 121393$$

$$\frac{F_{27}}{F_{26}} = 1.6180339888$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 26$



$$F_{26} = 121393$$

$$\frac{F_{27}}{F_{26}} = 1.6180339888$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 27$



$$F_{27} = 196418$$

$$\frac{F_{28}}{F_{27}} = 1.6180339887$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 27$



$$F_{27} = 196418$$

$$\frac{F_{28}}{F_{27}} = 1.6180339887$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 27$



$$F_{27} = 196418$$

$$\frac{F_{28}}{F_{27}} = 1.6180339887$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 28$



$$F_{28} = 317811$$

$$\frac{F_{29}}{F_{28}} = 1.6180339888$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 28$



$$F_{28} = 317811$$

$$\frac{F_{29}}{F_{28}} = 1.6180339888$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 28$



$$F_{28} = 317811$$

$$\frac{F_{29}}{F_{28}} = 1.6180339888$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 29



$$F_{29} = 514229$$

$$\frac{F_{30}}{F_{29}} = 1.6180339887$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 29



$$F_{29} = 514229$$

$$\frac{F_{30}}{F_{29}} = 1.6180339887$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

n = 29



$$F_{29} = 514229$$

$$\frac{F_{30}}{F_{29}} = 1.6180339887$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 30$



$$F_{30} = 832040$$

$$\frac{F_{31}}{F_{30}} = 1.6180339888$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 30$



$$F_{30} = 832040$$

$$\frac{F_{31}}{F_{30}} = 1.6180339888$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 30$



$$F_{30} = 832040$$

$$\frac{F_{31}}{F_{30}} = 1.6180339888$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 31$



$$F_{31} = 1346269$$

$$\frac{F_{32}}{F_{31}} = 1.6180339887$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 31$



$$F_{31} = 1346269$$

$$\frac{F_{32}}{F_{31}} = 1.6180339887$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 31$



$$F_{31} = 1346269$$

$$\frac{F_{32}}{F_{31}} = 1.6180339887$$



November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 32$



$$F_{32} = 2178309$$

$$\frac{F_{33}}{F_{32}} = 1.6180339887$$



Animazione Fibonacci Day

November, 23 - 11.23 - “ ϕ -bonacci Day”

$n = 32$



$$F_{32} = 2178309$$

$$\frac{F_{33}}{F_{32}} = 1.6180339887$$



◀ Indietro

↻ Ripeti

▶ Avanti

▶ Approfondimenti

Funzione generatrice dei numeri di Fibonacci

Un terzo modo per arrivare alla formula di Binet...

I numeri di Fibonacci sono definiti dalla relazione di ricorrenza:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

con le condizioni iniziali:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1$$

La **funzione generatrice** è una serie di potenze formale:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + \dots$$

Derivazione della formula

Partiamo dalla definizione di $f(x)$ e isoliamo i primi termini:

$$f(x) = F_0 + F_1x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n$$

Sostituiamo $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$:

$$f(x) = 0 + 1x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2})x^n$$

Spezziamo la sommatoria:

$$f(x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n$$

Riconduzione a $f(x)$

Manipoliamo le potenze di x per far riapparire $f(x)$:

- ▶ $\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = x \cdot f(x)$
- ▶ $\sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2}x^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = x^2 \cdot f(x)$

Quindi l'equazione diventa:

$$f(x) = x + xf(x) + x^2f(x)$$

Risultato finale

Raggruppando i termini con $f(x)$:

$$f(x) - xf(x) - x^2f(x) = x$$

$$f(x)(1 - x - x^2) = x$$

Funzione generatrice dei numeri di Fibonacci

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

Questa funzione racchiude in sé l'intera sequenza di Fibonacci!

L'estrazione dei numeri

Cosa succede se proviamo a dividere x per $(1 - x - x^2)$? Eseguiamo la divisione tra polinomi:

► $x : (1 - x - x^2) = \mathbf{0} + \mathbf{1}x + \dots$

► Sottraendo i prodotti otteniamo i termini successivi:

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = 0x^0 + 1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots$$

I coefficienti della serie sono esattamente la sequenza:

$$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$$

Ogni numero di Fibonacci è il coefficiente di x^n .

Un caso particolare: $x = 0,1$

Cosa succede se valutiamo la funzione generatrice in $x = \frac{1}{10}$?

$$f(0,1) = \frac{0,1}{1 - 0,1 - (0,1)^2} = \frac{0,1}{1 - 0,1 - 0,01} = \frac{0,1}{0,89} = \frac{10}{89}$$

Espandendo la frazione in decimali, i numeri di Fibonacci "emergono" nelle cifre:

- ▶ 0,1
- ▶ +0,01 (F_2)
- ▶ +0,002 (F_3)
- ▶ +0,0003 (F_4)
- ▶ +0,00005 (F_5)
- ▶ +0,000008 (F_6)
- ▶ +0,0000013 (F_7 ... qui iniziano i riporti!)

$$\frac{10}{89} = 0,11235955 \dots$$

Nota: $F_6 = 8$ e $F_7 = 13$. La somma $0,000008 + 0,0000013$ genera il **9** che vedi nella quinta cifra decimale.

La sorprendente frazione $1/89$

Se valutiamo la funzione generatrice in $x = \frac{1}{10}$, abbiamo visto che:

$$f(0, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(0, 1)^n = \frac{10}{89}$$

Dividendo entrambi i membri per 10, otteniamo la celebre frazione:

$$\frac{1}{89} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n}{10^{n+1}}$$

Questa somma esprime esattamente i numeri di Fibonacci "slittati" di una posizione decimale:

$$\frac{1}{89} = \frac{F_0}{10} + \frac{F_1}{10^2} + \frac{F_2}{10^3} + \frac{F_3}{10^4} + \frac{F_4}{10^5} + \dots$$

Visualizzazione dei decimali di $1/89$

Espandendo la somma, vediamo come i numeri si sovrappongono:

$$\begin{array}{r} 0,0 \quad (F_0) \\ 0,01 \quad (F_1) \\ 0,001 \quad (F_2) \\ 0,0002 \quad (F_3) \\ 0,00003 \quad (F_4) \\ 0,000005 \quad (F_5) \\ 0,0000008 \quad (F_6) \\ 0,00000013 \quad (F_7) \quad \leftarrow \text{Inizio dei riporti} \\ \hline 0,0112359\dots \end{array}$$

Il valore $1/89$ è un numero periodico con un periodo di **44 cifre**, all'interno del quale continuano a sommarsi i termini della successione.

Un esempio numerico sorprendente

Se scegliamo un valore di x molto piccolo, ad esempio $x = 0,01$, la funzione "stampa" i numeri di Fibonacci nei decimali:

$$f(0,01) = \frac{0,01}{1 - 0,01 - 0,0001} = \frac{0,01}{0,9899} \approx 0,0101020305081321\dots$$

Notiamo la sequenza nei decimali:

- ▶ 01 (F_1)
- ▶ 01 (F_2)
- ▶ 02 (F_3)
- ▶ 03 (F_4)
- ▶ 05 (F_5)
- ▶ 08 (F_6)
- ▶ 13 (F_7)

(Nota: i decimali si sovrappongono quando i numeri superano le due cifre.)

Verifica computazionale (con Python)

Possiamo verificare l'espansione di $1/89$ aumentando la precisione decimale per osservare i numeri di Fibonacci senza gli arrotondamenti standard:

Codice Python (Decimal Library)

```
from decimal import getcontext, Decimal

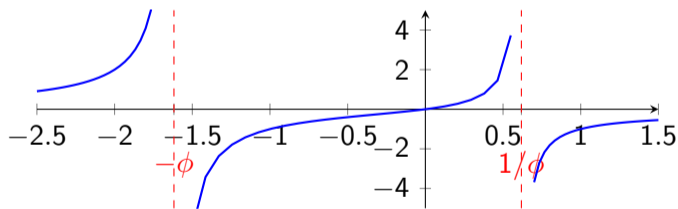
getcontext().prec = 50 # Precisione a 50 cifre
frazione = Decimal(1) / Decimal(89)
print(frazione)
# Output: 0.0112359550561797752808988...
```

- ▶ **0, 1, 1, 2, 3, 5** sono chiaramente visibili.
- ▶ Il **9** deriva da $F_6(8) +$ riporto di $F_7(13)$.
- ▶ All'aumentare della precisione, la struttura dei riporti rivela come ogni cifra sia influenzata dai termini successivi della serie.

Gli asintoti della funzione e il rapporto aureo

Grafico della funzione generatrice $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ e asintoti: il denominatore $1-x-x^2$ si annulla per due valori legati a $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$:

1. $x_1 = \frac{1}{\phi} = \phi - 1 \approx 0,618$ (determina il raggio di convergenza)
2. $x_2 = -\phi \approx -1,618$



La serie di potenze converge solo nell'intervallo $(-\frac{1}{\phi}, \frac{1}{\phi})$.

Dalla funzione alla formula di Binet, in un terzo modo

Scomponiamo $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ in fratti semplici usando le radici $x_1 = \frac{1}{\phi}$ e $x_2 = -\psi$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\phi x} - \frac{1}{1-\psi x} \right)$$

dove $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$.

Usando lo sviluppo della serie geometrica $\frac{1}{1-at} = \sum a^n t^n$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \phi^n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n x^n \right)$$

Formula di Binet

Confrontando i coefficienti di x^n , otteniamo il termine generale:

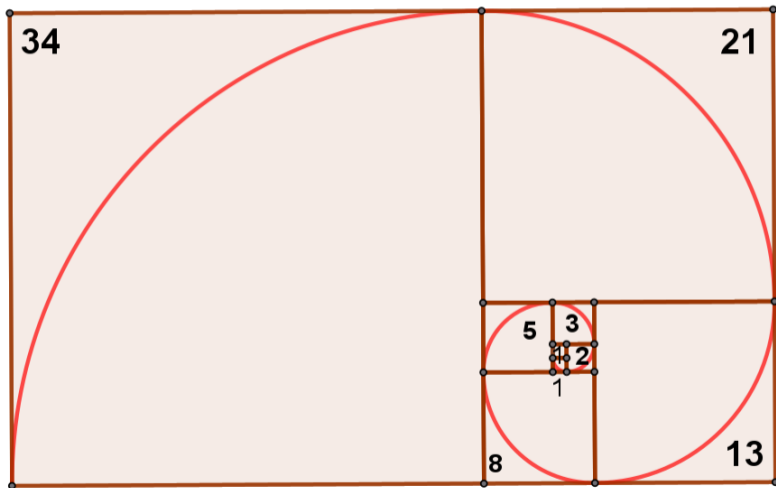
$$F_n = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$$

Analisi della formula di Binet

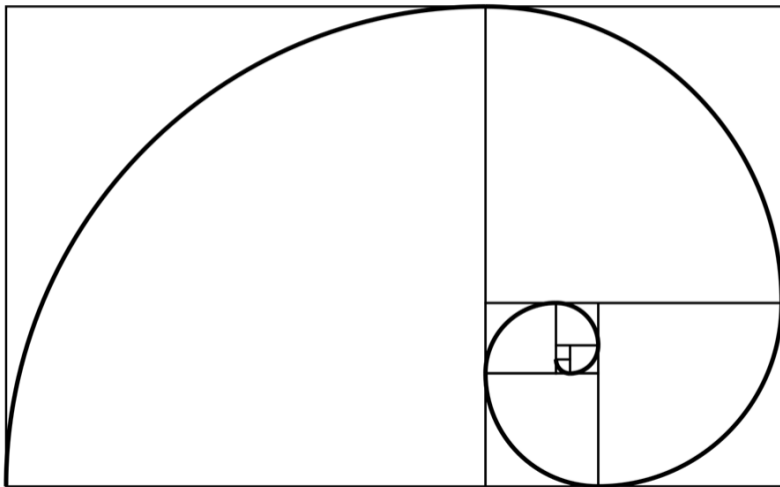
Poiché $|\psi| < 1$, il termine ψ^n tende a zero molto rapidamente all'aumentare di n .

- ▶ Per $n \rightarrow \infty$, il numero di Fibonacci è quasi interamente determinato da $\phi^n / \sqrt{5}$.
- ▶ Questo spiega perché il rapporto F_{n+1}/F_n tende alla **Sezione Aurea** ϕ .
- ▶ Possiamo scrivere: $F_n = \text{round} \left(\frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right)$.

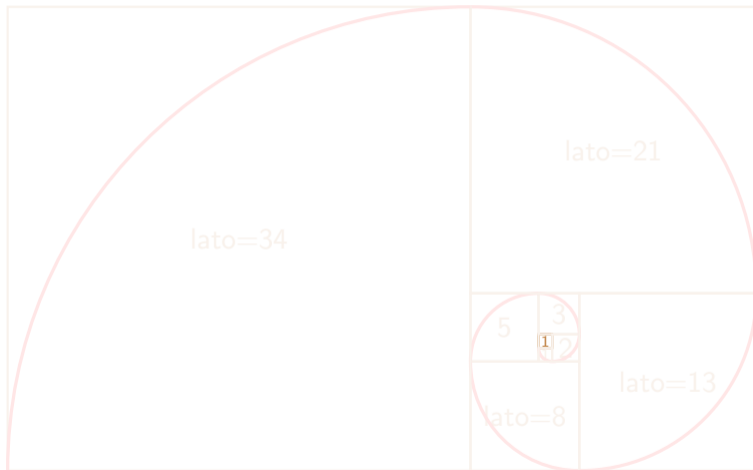
Quadrati e rettangoli costruiti sui numeri di Fibonacci



Pseudo spirale logaritmica (archi di circonferenza)

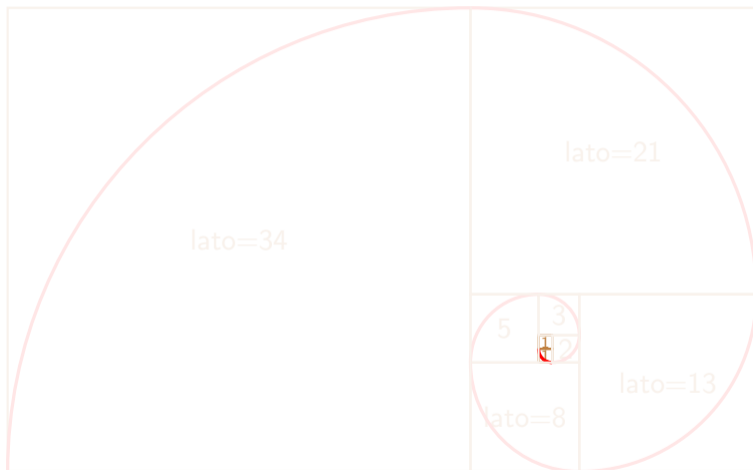


Spirale quasi aurea-quadrati dei numeri di Fibonacci



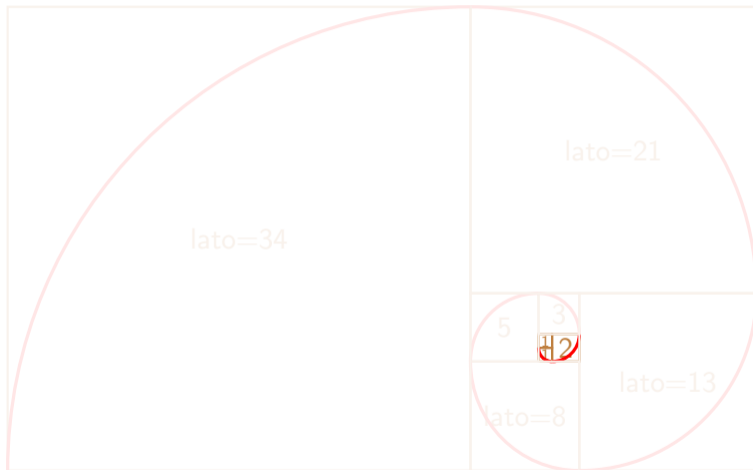
La spirale segue la crescita della successione e tende alla *spirale logaritmica aurea*.

Spirale quasi aurea-quadrati dei numeri di Fibonacci



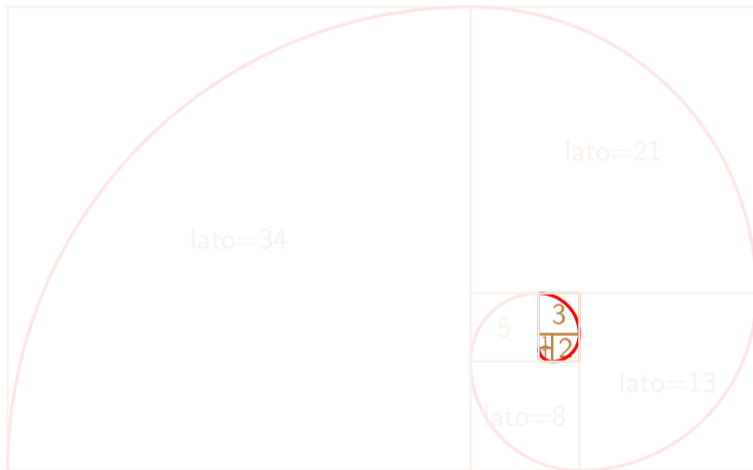
La spirale segue la crescita della successione e tende alla *spirale logaritmica aurea*.

Spirale quasi aurea-quadrati dei numeri di Fibonacci



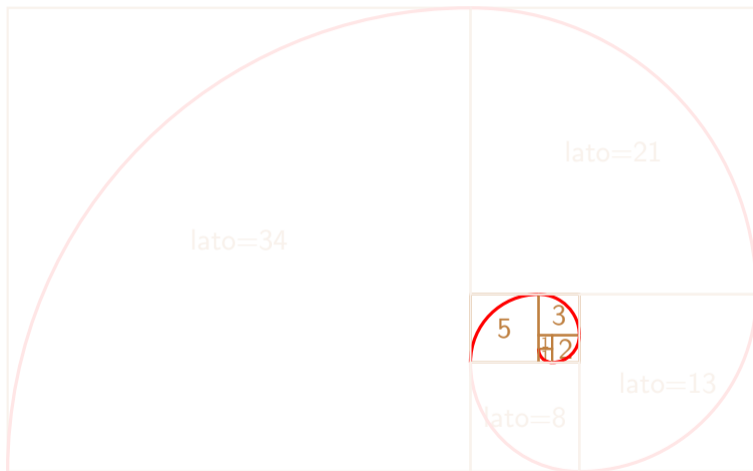
La spirale segue la crescita della successione e tende alla *spirale logaritmica aurea*.

Spirale quasi aurea-quadrate dei numeri di Fibonacci



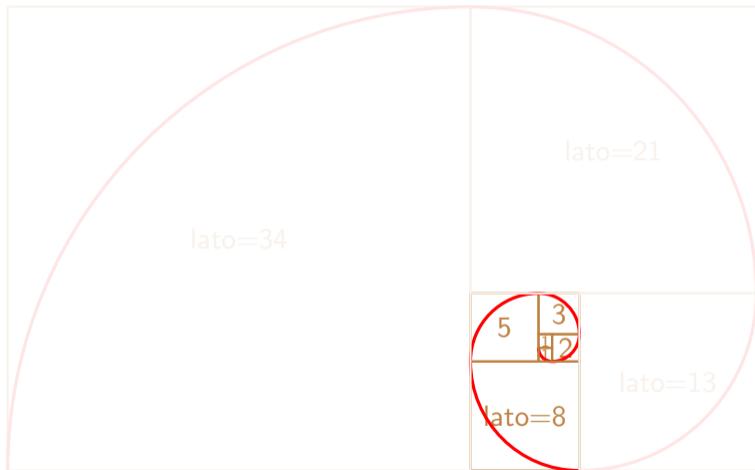
La spirale segue la crescita della successione e tende alla *spirale logaritmica aurea*.

Spirale quasi aurea-quadrate dei numeri di Fibonacci



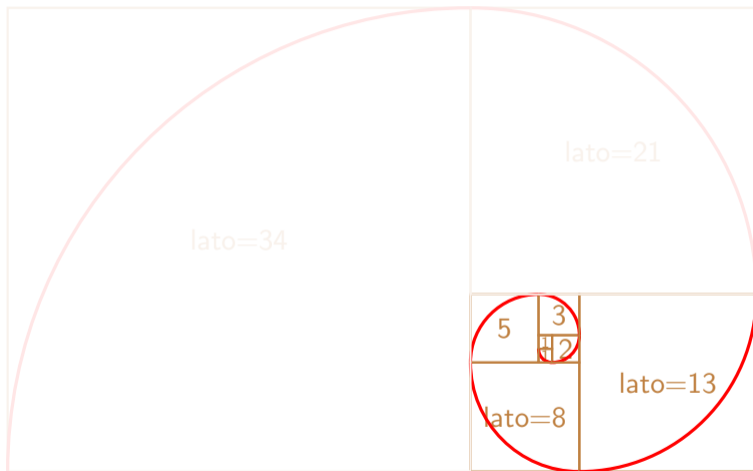
La spirale segue la crescita della successione e tende alla *spirale logaritmica aurea*.

Spirale quasi aurea-quadrati dei numeri di Fibonacci



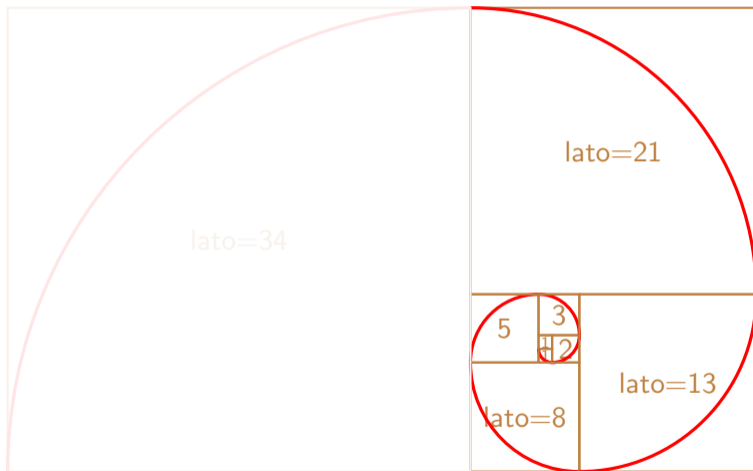
La spirale segue la crescita della successione e tende alla *spirale logaritmica aurea*.

Spirale quasi aurea-quadrati dei numeri di Fibonacci



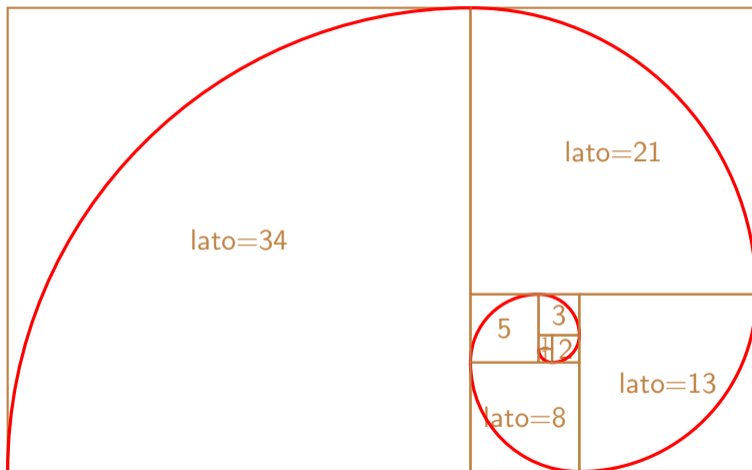
La spirale segue la crescita della successione e tende alla *spirale logaritmica aurea*.

Spirale quasi aurea-quadrati dei numeri di Fibonacci



La spirale segue la crescita della successione e tende alla *spirale logaritmica aurea*.

Spirale quasi aurea-quadrati dei numeri di Fibonacci



La spirale segue la crescita della successione e tende alla *spirale logaritmica aurea*.

Rettangolo di lati F_{n+1} e F_n

Vedi questo programma in Python che disegna i quadrati che hanno per lati i successivi numeri di Fibonacci, in modo opportuno, per costruire una sequenza di rettangoli che hanno per lati due numeri di Fibonacci successivi, ossia F_{n+1} e F_n .

Numeri di Lucas

- ▶ I numeri di Lucas (Édouard Lucas, 1842-1891, matematico francese) formano una successione strettamente collegata con la successione di Fibonacci.
- ▶ Tale successione è definita ponendo

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Si ha quindi, per esempio:



Numeri di Lucas

- ▶ I numeri di Lucas (Édouard Lucas, 1842-1891, matematico francese) formano una successione strettamente collegata con la successione di Fibonacci.
- ▶ Tale successione è definita ponendo

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

▶ Si ha quindi, per esempio:

$$\times L_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3$$

$$\times L_3 = F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$$

$$\times L_4 = F_3 + F_5 = 2 + 5 = 7$$

$$\times L_5 = F_4 + F_6 = 3 + 8 = 11 \dots \text{e così via.}$$



Numeri di Lucas

- ▶ I numeri di Lucas (Édouard Lucas, 1842-1891, matematico francese) formano una successione strettamente collegata con la successione di Fibonacci.
- ▶ Tale successione è definita ponendo

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

▶ Si ha quindi, per esempio:

$$\times L_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3$$

$$\times L_3 = F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$$

$$\times L_4 = F_3 + F_5 = 2 + 5 = 7$$

$$\times L_5 = F_4 + F_6 = 3 + 8 = 11 \dots \text{e così via.}$$



Numeri di Lucas

- ▶ I numeri di Lucas (Édouard Lucas, 1842-1891, matematico francese) formano una successione strettamente collegata con la successione di Fibonacci.
- ▶ Tale successione è definita ponendo

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Si ha quindi, per esempio:
 - ▶ $L_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3$
 - ▶ $L_3 = F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$
 - ▶ $L_4 = F_3 + F_5 = 2 + 5 = 7$
 - ▶ $L_5 = F_4 + F_6 = 3 + 8 = 11$... e così via.



Numeri di Lucas

- ▶ I numeri di Lucas (Édouard Lucas, 1842-1891, matematico francese) formano una successione strettamente collegata con la successione di Fibonacci.
- ▶ Tale successione è definita ponendo

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Si ha quindi, per esempio:
 - ▶ $L_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3$
 - ▶ $L_3 = F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$
 - ▶ $L_4 = F_3 + F_5 = 2 + 5 = 7$
 - ▶ $L_5 = F_4 + F_6 = 3 + 8 = 11$... e così via.



Numeri di Lucas

- ▶ I numeri di Lucas (Édouard Lucas, 1842-1891, matematico francese) formano una successione strettamente collegata con la successione di Fibonacci.
- ▶ Tale successione è definita ponendo

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Si ha quindi, per esempio:
 - ▶ $L_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3$
 - ▶ $L_3 = F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$
 - ▶ $L_4 = F_3 + F_5 = 2 + 5 = 7$
 - ▶ $L_5 = F_4 + F_6 = 3 + 8 = 11$... e così via.



Numeri di Lucas

- ▶ I numeri di Lucas (Édouard Lucas, 1842-1891, matematico francese) formano una successione strettamente collegata con la successione di Fibonacci.
- ▶ Tale successione è definita ponendo

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Si ha quindi, per esempio:
 - ▶ $L_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3$
 - ▶ $L_3 = F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$
 - ▶ $L_4 = F_3 + F_5 = 2 + 5 = 7$
 - ▶ $L_5 = F_4 + F_6 = 3 + 8 = 11$... e così via.



Numeri di Lucas

- ▶ I numeri di Lucas (Édouard Lucas, 1842-1891, matematico francese) formano una successione strettamente collegata con la successione di Fibonacci.
- ▶ Tale successione è definita ponendo

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Si ha quindi, per esempio:

- ▶ $L_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3$

- ▶ $L_3 = F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$

- ▶ $L_4 = F_3 + F_5 = 2 + 5 = 7$

- ▶ $L_5 = F_4 + F_6 = 3 + 8 = 11 \dots$ e così via.



Numeri di Lucas

- ▶ I numeri di Lucas (Édouard Lucas, 1842-1891, matematico francese) formano una successione strettamente collegata con la successione di Fibonacci.
- ▶ Tale successione è definita ponendo

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1$$

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Si ha quindi, per esempio:
 - ▶ $L_2 = F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3$
 - ▶ $L_3 = F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$
 - ▶ $L_4 = F_3 + F_5 = 2 + 5 = 7$
 - ▶ $L_5 = F_4 + F_6 = 3 + 8 = 11 \dots$ e così via.



Successione di Lucas

- ▶ Pertanto i primi 16 termini della successione di Lucas, sono

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843

- ▶ Si nota subito che anche per i numeri di Lucas vale la relazione di ricorrenza:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Infatti:

Successione di Lucas

- ▶ Pertanto i primi 16 termini della successione di Lucas, sono

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843

- ▶ Si nota subito che anche per i numeri di Lucas vale la relazione di ricorrenza:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Infatti:

Successione di Lucas

- ▶ Pertanto i primi 16 termini della successione di Lucas, sono

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843

- ▶ Si nota subito che anche per i numeri di Lucas vale la relazione di ricorrenza:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

» Infatti:

Successione di Lucas

- ▶ Pertanto i primi 16 termini della successione di Lucas, sono

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843

- ▶ Si nota subito che anche per i numeri di Lucas vale la relazione di ricorrenza:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Infatti:

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n-2} &= \underbrace{(F_n + F_{n-2})}_{L_{n-1}} + \underbrace{(F_{n-1} + F_{n-3})}_{L_{n-2}} \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} = L_n \end{aligned}$$

Successione di Lucas

- ▶ Pertanto i primi 16 termini della successione di Lucas, sono

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843

- ▶ Si nota subito che anche per i numeri di Lucas vale la relazione di ricorrenza:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Infatti:

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n-2} &= \underbrace{(F_n + F_{n-2})}_{L_{n-1}} + \underbrace{(F_{n-1} + F_{n-3})}_{L_{n-2}} \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} = L_n \end{aligned}$$

Successione di Lucas

- ▶ Pertanto i primi 16 termini della successione di Lucas, sono

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843

- ▶ Si nota subito che anche per i numeri di Lucas vale la relazione di ricorrenza:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Infatti:

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n-2} &= \underbrace{(F_n + F_{n-2})}_{L_{n-1}} + \underbrace{(F_{n-1} + F_{n-3})}_{L_{n-2}} \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} = L_n \end{aligned}$$

Successione di Lucas

- ▶ Pertanto i primi 16 termini della successione di Lucas, sono

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843

- ▶ Si nota subito che anche per i numeri di Lucas vale la relazione di ricorrenza:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Infatti:

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n-2} &= \underbrace{(F_n + F_{n-2})}_{L_{n-1}} + \underbrace{(F_{n-1} + F_{n-3})}_{L_{n-2}} \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} = L_n \end{aligned}$$

Successione di Lucas

- ▶ Pertanto i primi 16 termini della successione di Lucas, sono

2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843

- ▶ Si nota subito che anche per i numeri di Lucas vale la relazione di ricorrenza:

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ per } n = 2, 3, 4, \dots$$

- ▶ Infatti:

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n-2} &= \underbrace{(F_n + F_{n-2})}_{L_{n-1}} + \underbrace{(F_{n-1} + F_{n-3})}_{L_{n-2}} \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n-2} + F_{n-3}) \\ &= F_{n+1} + F_{n-1} = L_n \end{aligned}$$

I numeri di Lucas con un linguaggio di programmazione

- ▶ Con un linguaggio di programmazione (per esempio, Python) possiamo elencare alcuni numeri di Lucas.
- ▶ Programma (in Python) per ottenere l'n-esimo numero di Lucas
- ▶ Programma (in Python) per ottenere una tabella di numeri di Lucas

I numeri di Lucas con un linguaggio di programmazione

- ▶ Con un linguaggio di programmazione (per esempio, Python) possiamo elencare alcuni numeri di Lucas.
- ▶ Programma (in Python) per ottenere l'n-esimo numero di Lucas
- ▶ Programma (in Python) per ottenere una tabella di numeri di Lucas

I numeri di Lucas con un linguaggio di programmazione

- ▶ Con un linguaggio di programmazione (per esempio, Python) possiamo elencare alcuni numeri di Lucas.
- ▶ Programma (in Python) per ottenere l'n-esimo numero di Lucas
- ▶ Programma (in Python) per ottenere una tabella di numeri di Lucas

I numeri di Lucas con un linguaggio di programmazione

- ▶ Con un linguaggio di programmazione (per esempio, Python) possiamo elencare alcuni numeri di Lucas.
- ▶ Programma (in Python) per ottenere l' n -esimo numero di Lucas
- ▶ Programma (in Python) per ottenere una tabella di numeri di Lucas

Una formula per i numeri di Lucas analoga a quella di Binet

- ▶ Usando la formula di Binet, trovata per i numeri di Fibonacci, è possibile trovare una formula analoga per i numeri di Lucas

$$\begin{aligned}L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} = \frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\phi - \psi} + \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi - \psi} = \\ &= \frac{1}{\phi - \psi} \left[\phi^n \left(\frac{1}{\phi} + \phi \right) - \psi^n \left(\frac{1}{\psi} + \psi \right) \right] =\end{aligned}$$

Una formula per i numeri di Lucas analoga a quella di Binet

- Usando la formula di Binet, trovata per i numeri di Fibonacci, è possibile trovare una formula analoga per i numeri di Lucas

$$\begin{aligned}L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} = \frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\phi - \psi} + \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi - \psi} = \\&= \frac{1}{\phi - \psi} \left[\phi^n \left(\frac{1}{\phi} + \phi \right) - \psi^n \left(\frac{1}{\psi} + \psi \right) \right] = \\&= \frac{1}{\phi - \psi} [\phi^n (\phi - \psi) - \psi^n (-\phi + \psi)] = \phi^n + \psi^n\end{aligned}$$

Una formula per i numeri di Lucas analoga a quella di Binet

- ▶ Usando la formula di Binet, trovata per i numeri di Fibonacci, è possibile trovare una formula analoga per i numeri di Lucas

$$\begin{aligned}L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} = \frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\phi - \psi} + \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi - \psi} = \\&= \frac{1}{\phi - \psi} \left[\phi^n \left(\frac{1}{\phi} + \phi \right) - \psi^n \left(\frac{1}{\psi} + \psi \right) \right] = \\&= \frac{1}{\phi - \psi} [\phi^n (\phi - \psi) - \psi^n (-\phi + \psi)] = \phi^n + \psi^n\end{aligned}$$

Una formula per i numeri di Lucas analoga a quella di Binet

- Usando la formula di Binet, trovata per i numeri di Fibonacci, è possibile trovare una formula analoga per i numeri di Lucas

$$\begin{aligned}L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} = \frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\phi - \psi} + \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi - \psi} = \\&= \frac{1}{\phi - \psi} \left[\phi^n \left(\frac{1}{\phi} + \phi \right) - \psi^n \left(\frac{1}{\psi} + \psi \right) \right] = \\&= \frac{1}{\phi - \psi} [\phi^n (\phi - \psi) - \psi^n (-\phi + \psi)] = \phi^n + \psi^n\end{aligned}$$

Una formula per i numeri di Lucas analoga a quella di Binet

- Usando la formula di Binet, trovata per i numeri di Fibonacci, è possibile trovare una formula analoga per i numeri di Lucas

$$\begin{aligned}L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} = \frac{\phi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\phi - \psi} + \frac{\phi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\phi - \psi} = \\&= \frac{1}{\phi - \psi} \left[\phi^n \left(\frac{1}{\phi} + \phi \right) - \psi^n \left(\frac{1}{\psi} + \psi \right) \right] = \\&= \frac{1}{\phi - \psi} [\phi^n (\phi - \psi) - \psi^n (-\phi + \psi)] = \phi^n + \psi^n\end{aligned}$$

Una formula per i numeri di Lucas

- ▶ Abbiamo quindi ottenuto:

$$L_n = \phi^n + \psi^n$$

ovvero:

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

- ▶ Un altro bel risultato è il seguente (di immediata verifica):

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$F_{2n} = \frac{\phi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^n + \psi^n)$$

Una formula per i numeri di Lucas

- ▶ Abbiamo quindi ottenuto:

$$L_n = \phi^n + \psi^n$$

ovvero:

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- ▶ Un altro bel risultato è il seguente (di immediata verifica):

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$F_{2n} = \frac{\phi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^n + \psi^n)$$

Una formula per i numeri di Lucas

- ▶ Abbiamo quindi ottenuto:

$$L_n = \phi^n + \psi^n$$

ovvero:

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- ▶ Un altro bel risultato è il seguente (di immediata verifica):

$$F_{2n} = F_n L_n$$
$$F_{2n} = \frac{\phi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^n + \psi^n)$$

Una formula per i numeri di Lucas

- ▶ Abbiamo quindi ottenuto:

$$L_n = \phi^n + \psi^n$$

ovvero:

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- ▶ Un altro bel risultato è il seguente (di immediata verifica):

$$F_{2n} = F_n L_n$$
$$F_{2n} = \frac{\phi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^n + \psi^n)$$

Una formula per i numeri di Lucas

- ▶ Abbiamo quindi ottenuto:

$$L_n = \phi^n + \psi^n$$

ovvero:

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- ▶ Un altro bel risultato è il seguente (di immediata verifica):

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$F_{2n} = \frac{\phi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^n + \psi^n)$$

Una formula per i numeri di Lucas

- ▶ Abbiamo quindi ottenuto:

$$L_n = \phi^n + \psi^n$$

ovvero:

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- ▶ Un altro bel risultato è il seguente (di immediata verifica):

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$F_{2n} = \frac{\phi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^n + \psi^n)$$

Una formula per i numeri di Lucas

- ▶ Abbiamo quindi ottenuto:

$$L_n = \phi^n + \psi^n$$

ovvero:

$$L_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

- ▶ Un altro bel risultato è il seguente (di immediata verifica):

$$F_{2n} = F_n L_n$$

$$F_{2n} = \frac{\phi^{2n} - \psi^{2n}}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \cdot (\phi^n + \psi^n)$$

Problemi sui numeri di Fibonacci (e di Lucas)

- ▶ Numeri di Fibonacci e terne pitagoriche.
- ▶ Esiste un triangolo che abbia per lati tre numeri di Fibonacci consecutivi?
- ▶ Esistono triangoli che hanno i lati di lunghezza numeri di Fibonacci?
- ▶ Dimostrare che $F_{2n} = F_n L_n$.
- ▶ Esistono numeri di Lucas che sono anche numeri di Fibonacci?
- ▶ Provare che

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci.

- ▶ Provare che il baricentro del triangolo i cui vertici hanno coordinate

$$(F_n, L_n), (F_{n+1}, L_{n+1}), (F_{n+6}, L_{n+6})$$

è il punto di coordinate (F_{n+4}, L_{n+4}) dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci e L_n l' n -esimo numero di Lucas.

Problemi sui numeri di Fibonacci (e di Lucas)

- ▶ Numeri di Fibonacci e terne pitagoriche.
- ▶ Esiste un triangolo che abbia per lati tre numeri di Fibonacci consecutivi?
- ▶ Esistono triangoli che hanno i lati di lunghezza numeri di Fibonacci?
- ▶ Dimostrare che $F_{2n} = F_n L_n$.
- ▶ Esistono numeri di Lucas che sono anche numeri di Fibonacci?
- ▶ Provare che

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci.

- ▶ Provare che il baricentro del triangolo i cui vertici hanno coordinate

$$(F_n, L_n), (F_{n+1}, L_{n+1}), (F_{n+6}, L_{n+6})$$

è il punto di coordinate (F_{n+4}, L_{n+4}) dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci e L_n l' n -esimo numero di Lucas.

Problemi sui numeri di Fibonacci (e di Lucas)

- ▶ Numeri di Fibonacci e terne pitagoriche.
- ▶ Esiste un triangolo che abbia per lati tre numeri di Fibonacci consecutivi?
- ▶ Esistono triangoli che hanno i lati di lunghezza numeri di Fibonacci?
- ▶ Dimostrare che $F_{2n} = F_n L_n$.
- ▶ Esistono numeri di Lucas che sono anche numeri di Fibonacci?
- ▶ Provare che

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci.

- ▶ Provare che il baricentro del triangolo i cui vertici hanno coordinate

$$(F_n, L_n), (F_{n+1}, L_{n+1}), (F_{n+6}, L_{n+6})$$

è il punto di coordinate (F_{n+4}, L_{n+4}) dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci e L_n l' n -esimo numero di Lucas.

Problemi sui numeri di Fibonacci (e di Lucas)

- ▶ Numeri di Fibonacci e terne pitagoriche.
- ▶ Esiste un triangolo che abbia per lati tre numeri di Fibonacci consecutivi?
- ▶ Esistono triangoli che hanno i lati di lunghezza numeri di Fibonacci?
- ▶ Dimostrare che $F_{2n} = F_n L_n$.
- ▶ Esistono numeri di Lucas che sono anche numeri di Fibonacci?
- ▶ Provare che

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci.

- ▶ Provare che il baricentro del triangolo i cui vertici hanno coordinate

$$(F_n, L_n), (F_{n+1}, L_{n+1}), (F_{n+6}, L_{n+6})$$

è il punto di coordinate (F_{n+4}, L_{n+4}) dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci e L_n l' n -esimo numero di Lucas.

Problemi sui numeri di Fibonacci (e di Lucas)

- ▶ Numeri di Fibonacci e terne pitagoriche.
- ▶ Esiste un triangolo che abbia per lati tre numeri di Fibonacci consecutivi?
- ▶ Esistono triangoli che hanno i lati di lunghezza numeri di Fibonacci?
- ▶ Dimostrare che $F_{2n} = F_n L_n$.
- ▶ Esistono numeri di Lucas che sono anche numeri di Fibonacci?
- ▶ Provare che

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci.

- ▶ Provare che il baricentro del triangolo i cui vertici hanno coordinate

$$(F_n, L_n), (F_{n+1}, L_{n+1}), (F_{n+6}, L_{n+6})$$

è il punto di coordinate (F_{n+4}, L_{n+4}) dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci e L_n l' n -esimo numero di Lucas.

Problemi sui numeri di Fibonacci (e di Lucas)

- ▶ Numeri di Fibonacci e terne pitagoriche.
- ▶ Esiste un triangolo che abbia per lati tre numeri di Fibonacci consecutivi?
- ▶ Esistono triangoli che hanno i lati di lunghezza numeri di Fibonacci?
- ▶ Dimostrare che $F_{2n} = F_n L_n$.
- ▶ Esistono numeri di Lucas che sono anche numeri di Fibonacci?
- ▶ Provare che

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci.

- ▶ Provare che il baricentro del triangolo i cui vertici hanno coordinate

$$(F_n, L_n), (F_{n+1}, L_{n+1}), (F_{n+6}, L_{n+6})$$

è il punto di coordinate (F_{n+4}, L_{n+4}) dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci e L_n l' n -esimo numero di Lucas.

Problemi sui numeri di Fibonacci (e di Lucas)

- ▶ Numeri di Fibonacci e terne pitagoriche.
- ▶ Esiste un triangolo che abbia per lati tre numeri di Fibonacci consecutivi?
- ▶ Esistono triangoli che hanno i lati di lunghezza numeri di Fibonacci?
- ▶ Dimostrare che $F_{2n} = F_n L_n$.
- ▶ Esistono numeri di Lucas che sono anche numeri di Fibonacci?
- ▶ Provare che

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci.

- ▶ Provare che il baricentro del triangolo i cui vertici hanno coordinate

$$(F_n, L_n), (F_{n+1}, L_{n+1}), (F_{n+6}, L_{n+6})$$

è il punto di coordinate (F_{n+4}, L_{n+4}) dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci e L_n l' n -esimo numero di Lucas.

Problemi sui numeri di Fibonacci (e di Lucas)

- ▶ Numeri di Fibonacci e terne pitagoriche.
- ▶ Esiste un triangolo che abbia per lati tre numeri di Fibonacci consecutivi?
- ▶ Esistono triangoli che hanno i lati di lunghezza numeri di Fibonacci?
- ▶ Dimostrare che $F_{2n} = F_n L_n$.
- ▶ Esistono numeri di Lucas che sono anche numeri di Fibonacci?
- ▶ Provare che

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$$

dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci.

- ▶ Provare che il baricentro del triangolo i cui vertici hanno coordinate

$$(F_n, L_n), (F_{n+1}, L_{n+1}), (F_{n+6}, L_{n+6})$$

è il punto di coordinate (F_{n+4}, L_{n+4}) dove F_n indica l' n -esimo numero di Fibonacci e L_n l' n -esimo numero di Lucas.

La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

- ▶ La fillotassi è la disposizione spaziale delle foglie su un fusto, e la sequenza di Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) si manifesta nella fillotassi attraverso l'angolo di posizionamento delle foglie.
- ▶ Questo angolo, vicino ai $137,5^\circ$ (angolo aureo), minimizza l'ombreggiamento reciproco e massimizza l'esposizione alla luce...
- ▶ ...creando una spirale che segue rapporti matematici legati alla sequenza, come si osserva in molte piante, ad esempio girasoli e pigne.

La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

- ▶ La fillotassi è la disposizione spaziale delle foglie su un fusto, e la sequenza di Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) si manifesta nella fillotassi attraverso l'angolo di posizionamento delle foglie.
- ▶ Questo angolo, vicino ai $137,5^\circ$ (angolo aureo), minimizza l'ombreggiamento reciproco e massimizza l'esposizione alla luce...
- ▶ ...creando una spirale che segue rapporti matematici legati alla sequenza, come si osserva in molte piante, ad esempio girasoli e pigne.

La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

- ▶ La fillotassi è la disposizione spaziale delle foglie su un fusto, e la sequenza di Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) si manifesta nella fillotassi attraverso l'angolo di posizionamento delle foglie.
- ▶ Questo angolo, vicino ai $137,5^\circ$ (angolo aureo), minimizza l'ombreggiamento reciproco e massimizza l'esposizione alla luce...
- ▶ ...creando una spirale che segue rapporti matematici legati alla sequenza, come si osserva in molte piante, ad esempio girasoli e pigne.

La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

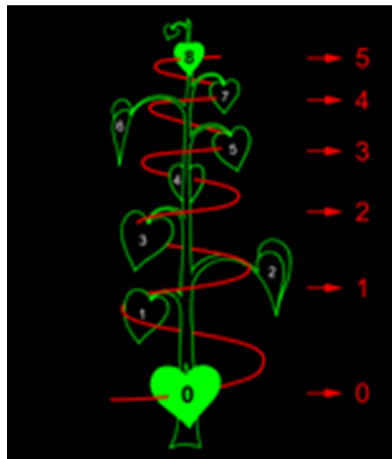
- ▶ La fillotassi è la disposizione spaziale delle foglie su un fusto, e la sequenza di Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) si manifesta nella fillotassi attraverso l'angolo di posizionamento delle foglie.
- ▶ Questo angolo, vicino ai $137,5^\circ$ (angolo aureo), minimizza l'ombreggiamento reciproco e massimizza l'esposizione alla luce...
- ▶ ...creando una spirale che segue rapporti matematici legati alla sequenza, come si osserva in molte piante, ad esempio girasoli e pigne.

La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

- ▶ La fillotassi è l'ordinamento delle foglie su un gambo o su di un ramo, o l'ordinamento dei semi o degli stami di alcuni fiori.
- ▶ Le foglie sui rami e i rami lungo il tronco tendono ad occupare posizioni che rendono massima l'esposizione al sole, alla pioggia, all'aria.
- ▶ Perciò un fusto verticale produce foglie e rami secondo schemi regolari.

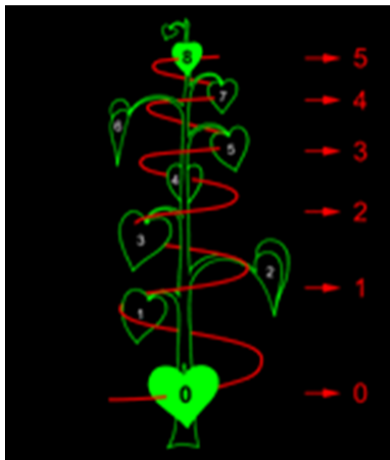
La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

- ▶ La fillotassi è l'ordinamento delle foglie su un gambo o su di un ramo, o l'ordinamento dei semi o degli stami di alcuni fiori.
- ▶ Le foglie sui rami e i rami lungo il tronco tendono ad occupare posizioni che rendono massima l'esposizione al sole, alla pioggia, all'aria.
- ▶ Perciò un fusto verticale produce foglie e rami secondo schemi regolari.



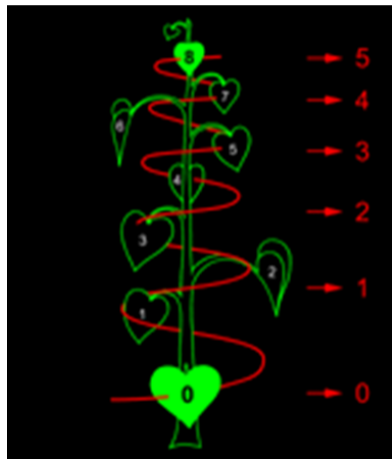
La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

- ▶ La fillotassi è l'ordinamento delle foglie su un gambo o su di un ramo, o l'ordinamento dei semi o degli stami di alcuni fiori.
- ▶ Le foglie sui rami e i rami lungo il tronco tendono ad occupare posizioni che rendono massima l'esposizione al sole, alla pioggia, all'aria.
- ▶ Perciò un fusto verticale produce foglie e rami secondo schemi regolari.



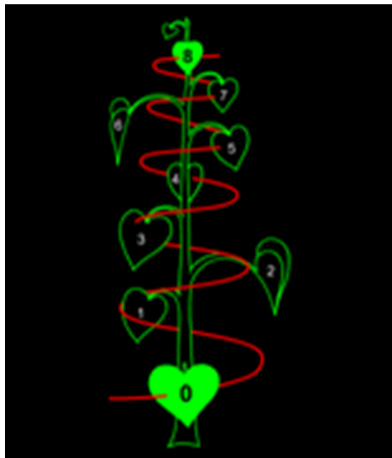
La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

- ▶ La fillotassi è l'ordinamento delle foglie su un gambo o su di un ramo, o l'ordinamento dei semi o degli stami di alcuni fiori.
- ▶ Le foglie sui rami e i rami lungo il tronco tendono ad occupare posizioni che rendono massima l'esposizione al sole, alla pioggia, all'aria.
- ▶ Perciò un fusto verticale produce foglie e rami secondo schemi regolari.



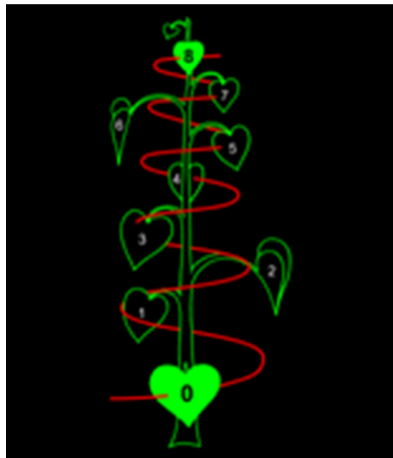
La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

- ▶ Nell'esempio qui a destra la foglia allineata con la prima è l'ottava.
- ▶ Inoltre, il numero di giri compiuti per trovare la foglia allineata con la prima è generalmente un numero di Fibonacci; per il nostro esempio il numero di giri è 5.
- ▶ Il quoziente di fillotassi è il rapporto tra il numero di giri e il numero di foglie tra due foglie simmetriche: tale quoziente è quasi sempre il rapporto tra due numeri consecutivi o alternati della successione di Fibonacci.



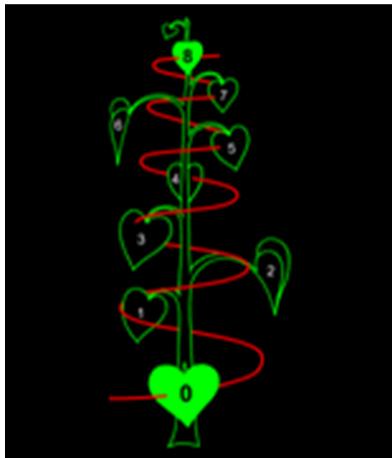
La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

- ▶ Nell'esempio qui a destra la foglia allineata con la prima è l'ottava.
- ▶ Inoltre, il numero di giri compiuti per trovare la foglia allineata con la prima è generalmente un numero di Fibonacci; per il nostro esempio il numero di giri è 5.
- ▶ Il quoziente di fillotassi è il rapporto tra il numero di giri e il numero di foglie tra due foglie simmetriche: tale quoziente è quasi sempre il rapporto tra due numeri consecutivi o alternati della successione di Fibonacci.



La Fillotassi e i numeri di Fibonacci

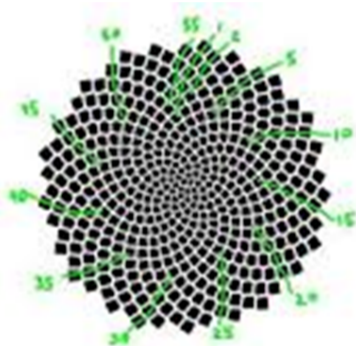
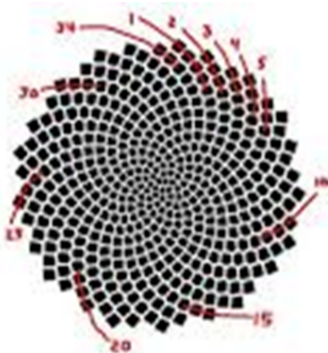
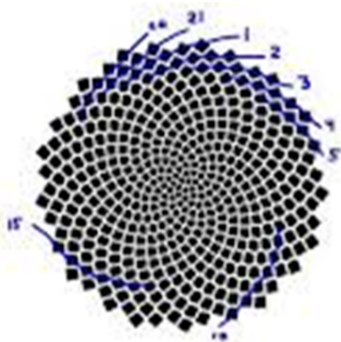
- ▶ Nell'esempio qui a destra la foglia allineata con la prima è l'ottava.
- ▶ Inoltre, il numero di giri compiuti per trovare la foglia allineata con la prima è generalmente un numero di Fibonacci; per il nostro esempio il numero di giri è 5.
- ▶ Il quoziente di fillotassi è il rapporto tra il numero di giri e il numero di foglie tra due foglie simmetriche: tale quoziente è quasi sempre il rapporto tra due numeri consecutivi o alternati della successione di Fibonacci.



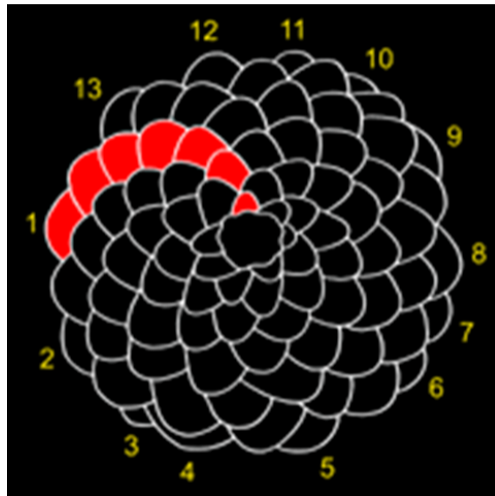
Numeri di Fibonacci e fillotassi nel girasole



Numeri di Fibonacci e fillotassi nel girasole



Numeri di Fibonacci e fillotassi in una pigna



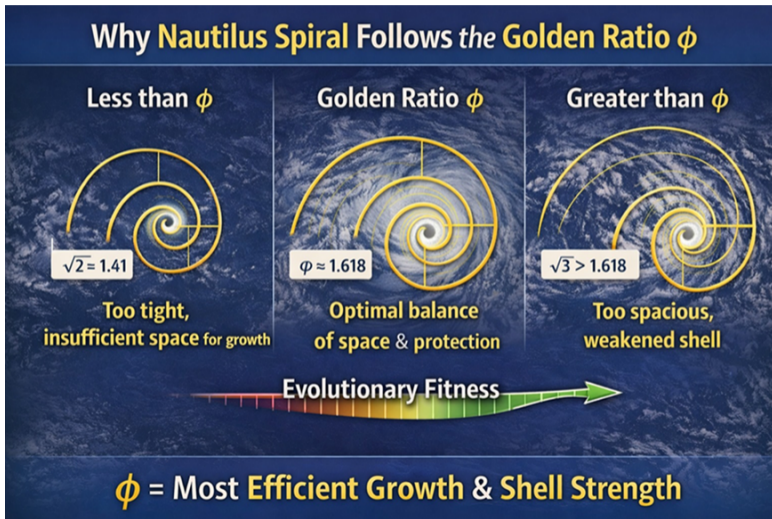
Numeri di Fibonacci e fillotassi nell'ananas



Spirali



ϕ fornisce la più efficiente spirale



Conclusioni

- ▶ In questa conversazione ho proposto un itinerario tra aritmetica, algebra e geometria sui numeri di Fibonacci.
- ▶ Come scritto nel sommario, si tratta di un argomento molto interessante della matematica che permette, a scuola, di collegare molti temi tra di loro.
- ▶ In particolare permette di presentare le definizioni di successione per ricorrenza, ma di trovare anche una formula «chiusa» (formula di Binet).
- ▶ Permette inoltre di risolvere dei problemi in cui si usa la dimostrazione per induzione.

Conclusioni

- ▶ In questa conversazione ho proposto un itinerario tra aritmetica, algebra e geometria sui numeri di Fibonacci.
- ▶ Come scritto nel sommario, si tratta di un argomento molto interessante della matematica che permette, a scuola, di collegare molti temi tra di loro.
- ▶ In particolare permette di presentare le definizioni di successione per ricorrenza, ma di trovare anche una formula «chiusa» (formula di Binet).
- ▶ Permette inoltre di risolvere dei problemi in cui si usa la dimostrazione per induzione.

Conclusioni

- ▶ In questa conversazione ho proposto un itinerario tra aritmetica, algebra e geometria sui numeri di Fibonacci.
- ▶ Come scritto nel sommario, si tratta di un argomento molto interessante della matematica che permette, a scuola, di collegare molti temi tra di loro.
- ▶ In particolare permette di presentare le definizioni di successione per ricorrenza, ma di trovare anche una formula «chiusa» (formula di Binet).
- ▶ Permette inoltre di risolvere dei problemi in cui si usa la dimostrazione per induzione.

Conclusioni

- ▶ In questa conversazione ho proposto un itinerario tra aritmetica, algebra e geometria sui numeri di Fibonacci.
- ▶ Come scritto nel sommario, si tratta di un argomento molto interessante della matematica che permette, a scuola, di collegare molti temi tra di loro.
- ▶ In particolare permette di presentare le definizioni di successione per ricorrenza, ma di trovare anche una formula «chiusa» (formula di Binet).
- ▶ Permette inoltre di risolvere dei problemi in cui si usa la dimostrazione per induzione.

Conclusioni

- ▶ In questa conversazione ho proposto un itinerario tra aritmetica, algebra e geometria sui numeri di Fibonacci.
- ▶ Come scritto nel sommario, si tratta di un argomento molto interessante della matematica che permette, a scuola, di collegare molti temi tra di loro.
- ▶ In particolare permette di presentare le definizioni di successione per ricorrenza, ma di trovare anche una formula «chiusa» (formula di Binet).
- ▶ Permette inoltre di risolvere dei problemi in cui si usa la dimostrazione per induzione.

Riferimenti bibliografici

- [1] L. Catastini, F. Ghione, *La matematica che trasformò il mondo. Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci*, Carocci, Roma, 2023.
- [2] S. Damantino, *Algebra*, Scienza Express, 2023.
- [3] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley-Interscience, 2001.
- [4] A. Posamentier, I. Lehmann, *The (Fabulous) Fibonacci Numbers*, Prometheus Books, 2007.
- [5] V. Roselli, *Matematiche elementari da un PVS*, appunti del corso, UniFe, a.a. 2022-2023.
- [6] N. Vorobiev, *Caractères de divisibilité. Suite de Fibonacci*, Editions Mir Moscou, 1973.

Grazie per l'attenzione!

Luigi Tomasi

Grazie per l'attenzione!

Luigi Tomasi