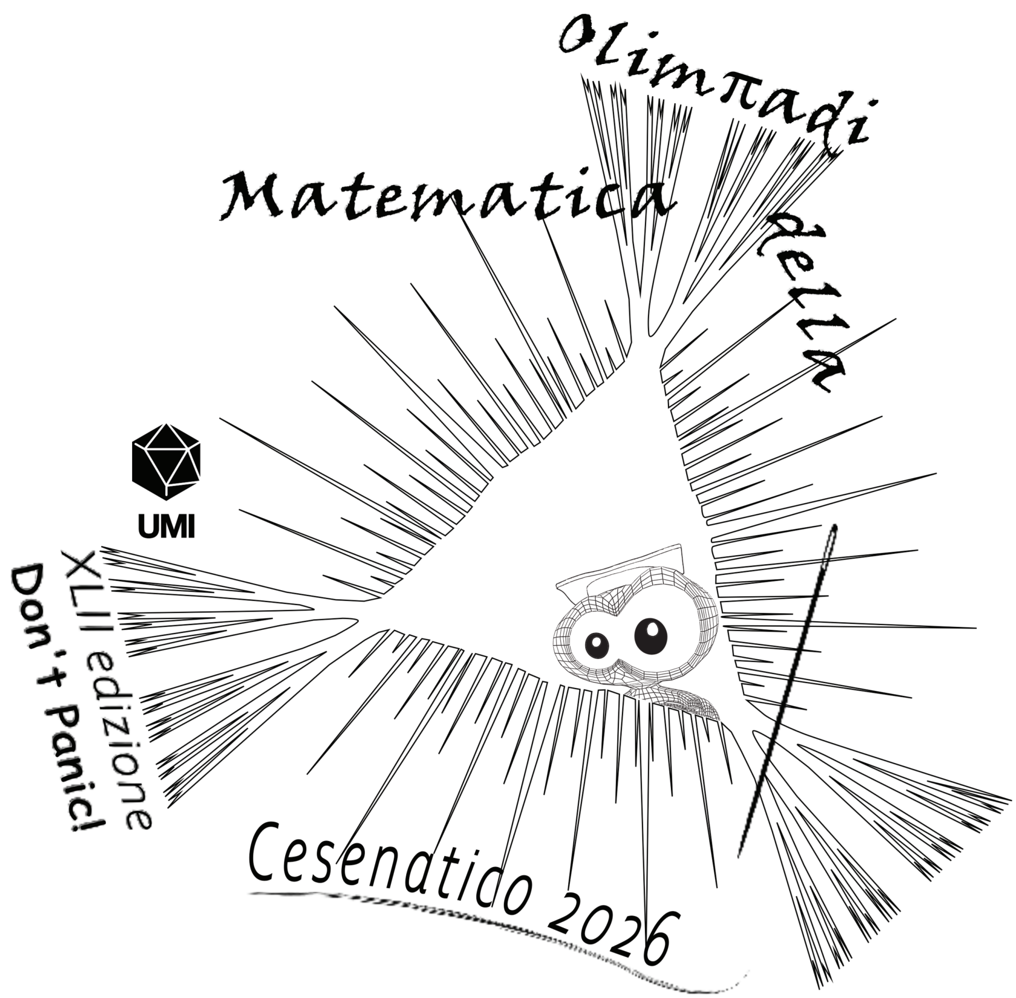
XLII Olimpiade Italiana di Matematica

Cesenatico 2026

8 maggio 2026

Criteri di valutazione e schemi di correzione



Introduzione

Questo documento contiene gli schemi di correzione usati nella Finale Nazionale 2026 delle Olimpiadi di Matematica (amichevolmente, Cesenatico 2026).

Per ogni esercizio troverete descritti vari possibili passaggi intermedi con i punteggi ad essi attribuiti; potrete leggere i commenti dei correttori sugli errori più comuni e le loro penalizzazioni, e su quali osservazioni, pur rilevanti, non siano state considerate sufficienti per ottenere punti.

Lo scopo di queste pagine è triplice:

1. fornire a chi si prepara alle gare delle olimpiadi un'idea di cosa viene valutato e cosa no e di come viene corretta una prova;
2. fornire ai docenti che preparano i propri studenti una linea guida per il tipo di valutazione che viene utilizzata nelle finali nazionali, sia nell'ottica della preparazione degli studenti, sia nell'ottica della correzione dei loro elaborati in fasi precedenti;
3. fornire a chi ha partecipato a questa edizione della Finale Nazionale un modo di interpretare il punteggio ottenuto in ogni singolo esercizio.

Consigliamo di accompagnare la lettura delle soluzioni ufficiali alla consultazione di questo documento.

Indice

Problema 1

> Esistono tre tipi di monete denominate in dollari altairiani (DA), del valore di 3 DA, 5 DA e 7 DA. Andromeda vorrebbe comprare una merendina da una di quelle macchinette malefiche che non restituiscono resto. Con le monete che possiede, potrebbe acquistare una merendina da 29 DA, pagando però 32 DA, e non ha modo di farlo con meno. C'è una merendina da 24 DA: quanto deve spendere Andromeda, al minimo, per averla?

Vi sono (almeno) due linee risolutive ragionevoli, che hanno marking scheme diversi ma tra loro compatibili. È importante osservare subito che la maggior parte degli errori si può ricondurre al confondere due concetti diversi, ovvero le quantità di monete a disposizione di Andromeda (chiamiamole (A_3, A_5, A_7)) e le quantità di monete che Andromeda potrebbe usare per comprare la merendina da 29 spendendo 32. A priori potrebbero esserci diverse configurazioni (c_3, c_5, c_7) compatibili con questa richiesta, anche se a posteriori si scopre che ve ne è una sola, che usa tutte le monete disponibili.

Denotiamo nel seguito con x il numero cercato, ovvero il minimo che si deve spendere per la merendina da 24.

Prima soluzione. Prevede di dimostrare innanzitutto che la configurazione con cui Andromeda può pagare 32 è necessariamente $(5, 5, 5, 5, 5, 7)$, ovvero $c_3 = 0$, $c_5 = 5$, $c_7 = 1$ e di conseguenza $x \leq 25$ (4 punti). Successivamente si dimostra che Andromeda non ha a disposizione altre monete (in particolare basta dimostrare che non ha nessuna moneta da 3 e ha solo una moneta da 7), e di conseguenza $x = 25$.

La prima parte si divide a sua volta in: **1 punto** per osservare che non vi sono monete da 3 nella configurazione per pagare 32 ($c_3 = 0$); **1 punto** per osservare che nella configurazione per pagare 32 vi è almeno un 7 e almeno un 5 ($c_5 \geq 1$, $c_7 \geq 1$); **1 punto** per determinare che l'unica combinazione da 32 è allora $c_3 = 0$, $c_5 = 5$, $c_7 = 1$; **1 punto** per concludere che $x \leq 25$. Non si tolgono punti se non viene verificato che la configurazione necessaria soddisfa le ipotesi del problema.

La seconda parte si appoggia fortemente sull'unicità di $c_3 = 0$, $c_5 = 5$, $c_7 = 1$ verificata in precedenza, e si divide a sua volta in: **1 punto** per dimostrare che non vi sono 3 a disposizione ($A_3 = 0$); **1 punto** per dimostrare che non vi è più di un 7 a disposizione ($A_7 = 1$); **1 punto** per concludere che 24 non si può ottenere ($x \geq 25$).

Seconda soluzione. Anche questa si divide naturalmente in due parti. La prima è che esiste una configurazione compatibile $c_3 = 0$, $c_5 = 5$, $c_7 = 1$ che dimostra che $x \geq 25$ (**2 punti**). La seconda è che nessuna configurazione compatibile può ottenere esattamente 24 (**5 punti**).

Si noti che la seconda soluzione dimostra un enunciato un po' più debole della prima, perché a priori potrebbero esistere situazioni in cui le monete a disposizione (A_3, A_5, A_7) non sono compatibili con la configurazione proposta, ma che soddisfano comunque tutte le condizioni. Visto che era onestamente possibile interpretare la richiesta dell'esercizio in questo senso più debole, si è deciso di non penalizzare queste soluzioni.

La prima parte della soluzione si divide in **1 punto** per verificare che la configurazione proposta soddisfa le ipotesi e **1 punto** per concludere che quindi $x \leq 25$.

La seconda parte della soluzione si basa sull'osservare che se Andromeda potesse pagare 24 esatti, aggiungendo un 5 potrebbe pagare 29, aggiungendo un 7 potrebbe pagare 31 e aggiungendo due 3 potrebbe pagare 30, quindi, in più rispetto ai 24 esatti non dispone di nessun 5, nessun 7 e al più un 3. Queste tre considerazioni analoghe tra loro valgono **1**, **3** o **5 punti**, a seconda che se ne facciano 1, 2 o 3. Nel caso non siano tutte e tre, se vi è la considerazione aggiuntiva che Andromeda deve comunque disporre di almeno altri 8 di valore, si aggiungono **2** o **1 punto**, a seconda che le considerazioni fossero 1 o 2.

Si noti che alla prima parte vengono attribuiti **4 punti** nella prima soluzione e **2 punti** nella seconda, perché nel secondo caso viene dimostrato un risultato più debole che non può essere usato per dimostrare la seconda parte della prima soluzione. Viceversa, la seconda parte vale di più nella prima soluzione perché deve essere ottenuta a partire da risultati parziali più deboli.

Infine, un criterio facile da sintetizzare che è essenzialmente equivalente alle seconde parti di entrambe le soluzioni, è che una soluzione non prende più di **5 punti** se non dimostra che $A_3 = 0$, o se non dimostra che $A_7 \leq 1$. Se mancano entrambi i risultati, il punteggio massimo è **4 punti**.

Problema 2

> Un cono retto e cavo di cialda croccante è alto $10\,\mathrm{cm}$. Vi si introduce una sfera di gelato, centrata in un punto O dell'asse del cono e tangente alla superficie laterale del cono lungo la circonferenza della base. Sia V il vertice del cono e K il punto di intersezione del segmento VO con la superficie della sfera. Dimostrare che la distanza VK fra il vertice del cono e la sfera è maggiore di $5\,\mathrm{cm}$.

Le soluzioni a questo problema si distinguono sostanzialmente in due categorie: quelle di natura più *sintetica*, cioè che utilizzano intuizioni e argomentazioni più geometriche (similitudini, teorema della bisettrice ecc.), e quelle di natura più *computazionale*, che esprimono esplicitamente la lunghezza VK in funzione di un parametro e procedono a risolvere il problema algebrico della sua stima. I due tipi di soluzione sono stati valutati ciascuno in base a un suo schema, come vedremo più avanti.

In ogni caso, un'osservazione preliminare utile per affrontare il problema è la riduzione dalla formulazione tridimensionale a un problema di geometria piana. Nel caso di elaborati che non avessero effettuato importanti progressi verso una soluzione (sintetica o computazionale) abbiamo comunque assegnato **1 punto** in totale (da non sommarsi ai punteggi parziali delle successive sezioni) se presentavano una chiara descrizione del problema in due dimensioni in termini di una circonferenza di centro O con due rette passanti per V ad essa tangenti; per ottenere tale punto, è necessario osservare (eventualmente sul diagramma) che, detti A e B i punti di tangenza, gli angoli $\widehat{OAV}$ e $\widehat{VBO}$ sono retti. Detto H il punto di intersezione fra AB e VO e K quello fra VO e la circonferenza, si vuole dimostrare che, se la lunghezza di VH è 10, allora la lunghezza di HK è al più 5 (la sua metà).

Si noti che il problema così come scritto richiede che la sfera sia *tangente alla superficie laterale del cono*; questo significa precisamente che, presa una sezione data da un piano qualunque passante per O e V, la circonferenza (ossia l'intersezione fra il piano e la sfera) deve essere tangente alle rette ottenute prolungando i segmenti che risultano dall'intersezione tra il cono e il piano. Alcuni concorrenti hanno dimostrato un risultato più generale, ovvero che, fissato nel piano un triangolo isoscele AVB con base AB e altezza VH lunga 10, la lunghezza HK vale al più 5 anche per circonferenze con il centro sull'asse di AB (dalla parte opposta rispetto a V) che intersechino i *segmenti* VA e VB solo negli estremi A e B. Questo risultato è ancora vero, e la riduzione di questo problema a quello originale non ha comportato meriti né demeriti nella valutazione.

Altri concorrenti, purtroppo, hanno male interpretato il problema, per esempio inserendo la sfera di gelato interamente all'interno del cono (in due dimensioni, hanno considerato la configurazione di un triangolo isoscele AVB con la circonferenza inscritta); in genere, tentativi di questo tipo hanno ottenuto **0 punti**.

Soluzioni sintetiche

Le soluzioni sintetiche tendono a passare per il fatto che la ceviana BK sia bisettrice nel triangolo HBV. Per una dimostrazione completa e corretta del fatto che $\widehat{ABK} = \widehat{KBV}$ sono stati assegnati **3 punti**.

Da qui, i concorrenti hanno concluso in diversi modi: è possibile ad esempio dimostrare tramite il teorema della bisettrice che il punto medio del segmento HV si trova nel segmento KV; oppure si può notare che il punto K è incentro del triangolo ABV, e dunque il simmetrico di H rispetto a K, ovvero l'intersezione fra l'incerchio e la retta VH, si trova necessariamente all'interno del segmento KV.

In particolare, ridursi esplicitamente a voler dimostrare che, in un triangolo rettangolo, detto M il punto medio dell'ipotenusa, la bisettrice cade nella metà dell'ipotenusa più vicina al cateto minore, vale **5 punti**.

Naturalmente una soluzione sintetica completa riceve **7 punti**; talvolta sono state penalizzate con $-$**1 punto** o $-$**2 punti** soluzioni con argomentazioni non spiegate in sufficiente dettaglio o parzialmente errate.

Soluzioni computazionali

La grande maggioranza delle soluzioni che abbiamo incontrato è stata di natura sostanzialmente computazionale. Si noti che la valutazione di tali soluzioni non è semplice, specialmente in presenza di piccoli errori nel calcolo che inficiano formalmente l'intera dimostrazione. La prassi a livello di gare internazionali, fermo restando che una soluzione corretta di qualunque genere valga il massimo dei punti, è quella di penalizzare fortemente soluzioni computazionali con errori, a prescindere dalla loro entità e posizione.

In questo caso, abbiamo cercato un approccio graduato e "generoso" in confronto allo standard internazionale, per non penalizzare eccessivamente concorrenti con una soluzione computazionale "quasi" corretta.

Si noti che un aspetto importante del problema è quello di esprimere la lunghezza del segmento KV (o HK) in funzione di un unico parametro: scelte molto ragionevoli sono il raggio R della circonferenza, la lunghezza h del segmento BH o una singola funzione trigonometrica dell'angolo $\theta = \widehat{OVB}$. Il calcolo (con piena giustificazione) di un'espressione corretta per la lunghezza in questione in funzione di un unico parametro (uno di quelli elencati o uno sostanzialmente equivalente) è stato valutato con **5 punti**. L'espressione della lunghezza come soluzione di un'equazione di secondo grado in un solo parametro (senza il calcolo esplicito della soluzione in funzione del parametro) è stato valutato **4 punti**.

Anche del progresso verso l'ottenimento di una tale espressione può fruttare punteggi parziali: abbiamo assegnato **1 punto** per chi avesse cominciato a calcolare lunghezze rilevanti (nell'interpretazione corretta della configurazione descritta dal testo), **2 punti** per il calcolo del segmento in questione in funzione di due parametri (una lunghezza e un angolo, due lunghezze...), **3 punti** per chi abbia espresso i parametri uno in funzione dell'altro, ma senza rendersi conto di poter esprimere KV (o HK) in modo utile in funzione di un parametro solo.

I **2 punti** finali sono assegnati per una corretta dimostrazione della disuguaglianza richiesta dalla tesi (se corretta e ben giustificata).

In molti casi, errori nelle espressioni coinvolte hanno portato a soluzioni che non possono considerarsi corrette, e sono stati solitamente penalizzati con deduzioni da **−1 punto** a **−3 punti**.

Una penalizzazione di **−1 punto** è stata applicata ad esempio a soluzioni (complete o parziali) con un piccolo errore di calcolo intervenuto quasi alla fine; nel caso di soluzioni quasi complete, l'errore, una volta corretto, non deve comportare alcuna differenza sostanziale nella dimostrazione della disuguaglianza. Una penalizzazione di **−2 punti** riguarda soluzioni con un errore relativamente semplice da correggere senza modificare l'idea della dimostrazione della disuguaglianza. Infine, una penalizzazione di **−3 punti** riguarda solitamente soluzioni in cui l'errore avviene già nel calcolo della lunghezza di KV (spesso per via dello scambio fra sin e cos o dell'applicazione scorretta del Teorema di Pitagora); questo risulta di solito in una disuguaglianza abbastanza analoga a quella giusta (e talvolta più difficile da dimostrare!), ma abbastanza diversa da richiedere una correzione non immediata.

Problema 3

(a) Determinare tutte le coppie di interi positivi $n > m$ con la seguente proprietà: esiste un intero positivo a tale che il più **piccolo** numero primo che divide $n + a$ coincide con il più **piccolo** numero primo che divide $m + a$.

(b) Determinare tutte le coppie di interi positivi $n > m$ con la seguente proprietà: esiste un intero positivo a tale che il più **piccolo** numero primo che divide $n + a$ coincide con il più **grande** numero primo che divide $m + a$.

Parte (a): 2 punti

1. **1 punto** per chi dimostra che la condizione è sufficiente: le coppie in cui n, m hanno la stessa parità soddisfano la proprietà. (Viene assegnato comunque **1 punto** anche a chi considera erroneamente solo uno dei due casi possibili per la parità, per esempio n, m entrambi pari.)
2. **1 punto** per chi dimostra che la condizione è necessaria: le coppie in cui n, m hanno parità diversa non soddisfano la proprietà.

Parte (b): 5 punti

3. **1 punto** per chi dimostra che la condizione è necessaria: tipicamente, mostrando che per le coppie con $n - m = 1$ gli interi $m + a$ e $n + a$ non possono avere divisori comuni. Il punto viene assegnato a chi dimostra questo fatto anche nel contesto di un tentativo di soluzione della parte (a).

   A chi ha 0 punti nel resto dell'esercizio, eccezionalmente viene dato **1 punto** anche per mostrare solamente che $p \mid n - m$, dove p è il primo che compare nel testo.

   Affermare (senza dimostrarlo) che tutte le coppie con $n - m > 1$ soddisfano la proprietà non dà altri punti aggiuntivi.

4. **1 punto** per chi costruisce (anche senza proseguire) una fattorizzazione di $m + a$ che:

   - consente di provare le divisibilità richieste (la costruzione $m + a = p^k$ non va bene!),
   - e contiene al suo interno un esponente o un parametro in modo da poter assicurare di produrre a positivo.

   Per esempio, la costruzione della soluzione ufficiale $m + a = p_1 p_2 \dots p_r p^k$, oppure $(p!)^k$.

   In alternativa, **1 punto** per chi costruisce *sia* una soluzione per il caso speciale in cui $n - m$ è multiplo di 2 costruendo $m + a = 2^k$, *sia* una soluzione per il caso speciale in cui $n - m$ è multiplo di 3 ma non di 2, costruendo $m + a = 2 \cdot 3^k$. Difatti, questi due casi speciali insieme permettono di intuire la costruzione generale della soluzione ufficiale, specialmente a chi continua con $m + a = 2 \cdot 3 \cdot 5^k$ quando $n - m$ è multiplo di 5 ma non di $2, 3$.

5. **2 punti** per chi dimostra che con la costruzione suggerita i primi minori di p non dividono $n + a$.
6. **1 punto** finale (assegnato solo a chi ha una soluzione completa o quasi) per chi controlla che effettivamente la costruzione suggerita permette di produrre a positivo per qualunque valore di n ed m.

Penalizzazioni per una soluzione completa a cui mancano alcuni dettagli

7. **−1 punto** per chi propone una costruzione che non contiene parametri liberi e quindi non consente di ottenere a positivo per ogni scelta di n, m; ad esempio $m + a = p!$.
8. **−1 punto** per chi non dimostra che la condizione $n - m > 1$ è necessaria.

Osservazioni sulla parte (b) che non valgono punti

9. **0 punti** per chi tratta solamente il primo dei due casi speciali suggeriti al termine del punto 4, costruendo l'a richiesto quando n, m hanno la stessa parità.

10. **0 punti** a chi scrive che $\mathrm{MCD}(m + a, n + a) = p^k$.

11. **0 punti** per chi scrive la forma generale delle decomposizioni in fattori primi $m + a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r} p^k$ e $n + a = p^h q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_s^{b_s}$, dove q_i sono primi più grandi di p. Difatti, queste decomposizioni non forniscono, da sole, indizi per intuire una costruzione che risolva l'esercizio.

12. **0 punti** anche per chi, in aggiunta al punto precedente, afferma che le coppie n, m sono tutte e sole le coppie che si possono scrivere nella forma

$$(n, m) = (p^h q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_s^{b_s} - a,\ p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r} p^k - a)$$

per qualche scelta dei parametri coinvolti. Difatti questa viene considerata solo come una riscrittura del testo in formule, e non come una caratterizzazione completa delle coppie (n, m).

13. **0 punti** per chi inizia (senza completarlo o completandolo in modo errato) un tentativo di soluzione utilizzando il teorema del resto di Sunzi (il cosiddetto "teorema cinese del resto"), imponendo che n e m debbano soddisfare certe congruenze modulo $p_1, \dots, p_r, p$. In particolare, un problema comune a molti di questi tentativi è che per il primo $p_1 = 2$ le condizioni imposte possono escludere sia la classe di resto 0 che la classe di resto 1.

Problema 4

> Sia ABC un triangolo con $AC > AB$ e D il punto medio dell'arco BC della circonferenza circoscritta ad ABC non contenente A. La retta perpendicolare ad AD passante per B interseca la retta parallela ad AD passante per C nel punto E. La retta parallela ad AB passante per E interseca AC nel punto F.
>
> Dimostrare che l'angolo $\widehat{AFD}$ è retto.

La maggior parte delle soluzioni complete ha presentato una strategia simile alla terza soluzione ufficiale, e una percentuale minore, ma significativa, ha invece presentato una strategia simile alla seconda soluzione ufficiale. Elaborati che hanno ricevuto punteggi parziali hanno seguito parte di una o dell'altra soluzione.

Terza soluzione. Si utilizza il punto G, intersezione di AC e BE. La soluzione si divide in due parti: bisogna prima mostrare che F è punto medio di CG (di solito caratterizzando ECG come triangolo rettangolo sull'ipotenusa CG e con F circocentro) e poi mostrare che il triangolo DCG è isoscele; questo implica DF mediana e dunque altezza.

(A1) Dimostrare che $FC = FG$: **4 punti**.

- Punteggio parziale: dimostrare che $EF = CF$ vale **2 punti**.

(A2) Dimostrare che DCG è un triangolo isoscele: **3 punti**.

- Punteggio parziale: dimostrare che $DB = DG$ vale **1 punto**.

Hanno ricevuto punteggi parziali anche elaborati che hanno fatto progressi significativi in uno di questi punti. Osservazioni sui triangoli EFG o EFC hanno ricevuto punteggi parziali di (A1). Si noti che bisogna *esplicitamente* osservare l'uguaglianza dei segmenti $EF = CF$ per ricevere 2 punti, non è sufficiente calcolare gli angoli $\widehat{FEC}$ e $\widehat{FCE}$.

Osservazioni che non valgono punti:

- Notare che AD è bisettrice dell'angolo $\widehat{BAC}$.
- Dimostrare che ABG è isoscele.

Variante. Chiamata H l'intersezione di AD e BE, si può concludere la terza soluzione nel seguente modo. Ottenuto che F è il punto medio di GC, per il teorema di Talete $HF \parallel BC$. Dunque $\widehat{GFH} = \widehat{GCB} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB} = \widehat{GDA} = \widehat{GDH}$, da cui si deduce che $GFDH$ è un quadrilatero ciclico e dunque $\widehat{GFD} = \widehat{GHD} = 90°$.

Seconda soluzione. In questa soluzione si usa che le rette BE e DF e la circonferenza ciroscritta al triangolo ABC si incontrano in un punto G (che non è lo stesso punto della soluzione precedente!).

Si può definire G come intersezione di due di questi oggetti (di solito una retta e la circonferenza) e dimostrare che appartiene al terzo (ovvero l'altra retta). Ci sono molti modi di uguale complessità per arrivare a tale risultato; uno di questi è la ciclicità di $EGFC$ come descritto nella seconda soluzione.

(B1) Dimostrare che $EGFC$ è ciclico (o affermazione equivalente): **4 punti**.

(B2) Concludere la dimostrazione: **3 punti**.

Un errore estremamente comune è stato assumere che D, F, G fossero allineati, senza fornirne una dimostrazione. Questo spesso era o "visto" dal disegno, senza dimostrarlo, oppure era stato dedotto con un erroneo ragionamento circolare ("assumendo X, dopo alcuni passaggi si dimostra che X è vera").

Elaborati che hanno presentato progressi parziali in entrambe le tracce di soluzione hanno ricevuto il massimo tra i due punteggi parziali. In particolare, molti compiti hanno dimostrato sia che F è punto medio di GC, sia che da D, F, G allineati si giunge alla tesi; questi compiti hanno ricevuto 4 punti.

Problema 5

> Un insieme di numeri interi positivi S si dice *distanziato* se **non** contiene alcuna coppia di elementi la cui differenza sia uno dei numeri $5, 10, 12, 17$. Ad esempio, $\{1, 2, 3, 10, 30\}$ è distanziato, mentre $\{1, 2, 3, 11\}$ non lo è (perché $11 - 1 = 10$). Quanti elementi può avere, al massimo, un sottoinsieme distanziato di $\{1, 2, 3, \ldots, 2025, 2026\}$?

Il caso è una bestia strana. Ci sono 138 415 insiemi distanziati di 646 numeri fra 1 e 2026. A dispetto di tanta abbondanza, i diciannove elaborati che arrivano a un abbozzo di soluzione si sono intestarditi su quattro sole possibilità; tutte e quattro periodiche, vassapere poi perché, di periodo 22. Ad ogni modo, esibire un insieme distanziato ottimale è il primo caposaldo dello schema di correzione, e vale **4 punti.**

I succitati insiemi di periodo 22 consistono nella ripetizione dei moduli seguenti

$$\begin{array}{l}
\{\ 1,\ 2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 8,\ 9,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 15, 16,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 22\ \} \\
\{\ 1,\ 2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 8,\ 9,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 15, 16, 17\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \} \\
\{\ 1,\ 2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 8,\ 9,\ 10,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 16, 17\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \} \\
\{\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 9,\ 10,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 16, 17\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \}
\end{array}$$

La densità ottimale è, quindi, di 7 elementi ogni 22 numeri consecutivi; occorre, tuttavia, gestire il fatto che 2026 non è multiplo di 22. Per questo, è importante che il modulo scelto contenga i numeri 1 e 2, di modo che 2025 e 2026, che avanzano dopo 92 ripetizioni, risultino nell'insieme. Si sono assegnati **3 punti** a elaborati che propongono una costruzione di densità $7/22$, ma non gestiscono correttamente il fatto che 2026 non è multiplo di 22.

Ci sono vari approcci che conducono a insiemi distanziati di densità inferiore a $7/22$. Un metodo consiste nell'esaminare tutti i numeri in ordine crescente, aggiungendo, via via, all'insieme quelli che non si trovano a distanza vietata da uno dei numeri già scelti. Questo metodo, l'*algoritmo greedy*, conduce al seguente modulo, che si ripete con periodo 22:

$$\{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \}$$

Fin qua, siamo a densità $5/22$, e **0 punti.** Non è difficile migliorare il risultato: per esempio, togliendo il 5 dal modulo, si guadagna la possibilità di aggiungere 10 e 17 ottenendo:

$$\{\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 10,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 17\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \}$$

Costruzioni simili, che producono densità $6/22$, valgono **1 punto.** Si può notare che ripetendo

$$\{\ 1,\ 2\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \}$$

con periodo 7 si ottiene un insieme distanziato di densità $2/7 > 6/22$, per cui anche questa costruzione vale **1 punto.**

I punteggi visti finora corrispondono a tappe del percorso mentale che porta a costruire un insieme di 646 elementi, quindi non si sommano fra loro. C'è però un percorso opposto, che mira a esibire un controllo dall'alto sul numero di elementi dell'insieme distanziato. Una prima osservazione a riguardo è che, ogni 15 numeri consecutivi, al più 5 appartengono all'insieme: al più un numero per ognuna delle terne $n, n+5, n+10$. Questa, o un'altra osservazione analoga che limita la densità a $1/3$, vale **1 punto,** additivo con le costruzioni da un punto. Ragionando su questa osservazione, si può costruire un insieme distanziato di densità $4/15$, per esempio ripetendo, con periodo 15, un modulo come:

$$\{\ 1,\ 2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ 8,\ 9\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \}$$

Questa costruzione non si somma al punto dell'osservazione, tuttavia vale, essa stessa, **1 punto.**

Merita particolare considerazione lo studio della simmetria nel problema che conduce al periodo 22. Il culmine di questo percorso è osservare che ogni sottoinsieme distanziato dei numeri $1 \ldots 22$, se ripetuto, dà luogo a un insieme periodico che è anch'esso distanziato. Ciò permette di dedurre immediatamente che la massima densità ottenibile è data dal più grande sottoinsieme distanziato di $1 \ldots 22$, e di ridursi, in pratica, allo studio di questo caso. Si tratta, quindi, di uno strumento molto potente, per cui questa osservazione, ancorché descritta, talora, in maniera imprecisa, vale **3 punti** che non si sommano ai punteggi precedentemente elencati. Risultati che vadano nella direzione di questo lemma possono valere **1 o 2 punti,** e vengono giudicati in base al contenuto matematico espresso. Per esempio, è considerato sufficiente per un punto dire che, fra i numeri $1 \dots 22$, ogni numero ne vieta esattamente altri quattro.

Per salire sopra i quattro punti, è necessario aver trovato un insieme distanziato di 646 elementi, e offrire passi significativi verso una dimostrazione dell'ottimalità di questo insieme. **5 punti,** secondo lo schema di correzione, sono assegnati a un elaborato che riduca questo problema all'esame di un numero trattabile di casi, sebbene l'esame stesso possa essere omesso o svolto in maniera errata. Un solo elaborato ha ottenuto questo punteggio. I **6 punti** sono riservati agli elaborati che difettino soltanto per un errore di facile correzione, per esempio l'omissione di uno fra diversi casi analoghi: questa circostanza non si è verificata.

Due elaborati hanno ricevuto il punteggio pieno di **7 punti.** Entrambi, dopo aver costruito l'insieme ottimale, dimostrano che, dati 22 numeri consecutivi, al più 7 di essi possono appartenere al medesimo insieme distanziato. Ambo le dimostrazioni poggiano sulla possibilità di costruire, con i numeri $1 \dots 22$, terne distinte ciascuno dei cui elementi è a distanza vietata dagli altri due. Una argomenta che, dato un insieme distanziato di 8 elementi, sarebbe possibile trovare 8 di queste terne, che è assurdo. L'altra costruisce a priori 7 terne con un numero di avanzo, deduce che questo numero dovrebbe appartenere a un ipotetico insieme distanziato di 8 elementi, e conclude con un semplice esame dei casi possibili.

Considerazioni generali & errori. Gli elaborati vengono valutati in base alle idee matematiche espresse in ciascuno, trascurando errori di calcolo, imperfezioni formali, etc. Per esempio, un errore nel calcolo del numero 646 non viene penalizzato, purché il calcolo stesso sia descritto o impostato correttamente. Assenza di enunciati formali e imprecisione nei nessi logici sono tollerate purché il cuore dell'argomentazione sia chiaramente comprensibile. I punti per le costruzioni vengono assegnati alla semplice esibizione di insiemi distanziati, indipendentemente dalla presenza e dalla correttezza di una verifica. Nel caso dei quattro punti per la costruzione ottimale, è sufficiente l'esibizione dell'esempio con la dichiarazione del numero 646. D'altro canto, la produzione di un esempio che non è distanziato, sia pure per errore nel calcolo o nell'enumerazione dei casi, non può essere considerata corretta.

Problema 6

> La banda "Mostly Harmless" è composta di nove musicisti che procedono in fila indiana. Inizialmente, la distanza fra ciascun musicista e il successivo è di un metro. Ad ogni colpo della grancassa, il primo della fila avanza di un metro. Poi, procedendo in ordine, dal secondo fino all'ottavo, ciascun musicista si dispone nel punto medio fra la posizione occupata da quello che lo precede e la posizione occupata da quello che lo segue. Infine, il nono, e ultimo, si porta un metro dietro all'ottavo. Dire se, dopo un numero sufficiente di colpi di grancassa, la fila supererà i $42\,\mathrm{m}$ di lunghezza.

La grandissima maggioranza degli elaborati non conteneva progressi sostanziali verso la soluzione. Molti dei restanti compiti sono stati considerati caso per caso, ma alla fine sono emerse alcune tipologie generali. Abbiamo deciso di assegnare punteggi parziali ad osservazioni che andassero nelle seguenti direzioni:

- può essere più facile lavorare con le distanze fra i musicisti o con le lunghezze dei 'passi' che compiono (ovvero le lunghezze di cui si spostano a ogni colpo della grancassa), piuttosto che con le loro posizioni.
- può essere utile considerare una configurazione dei musicisti che sia un 'punto fisso' per l'operazione descritta nel testo: se le distanze tra i musicisti consecutivi sono ad un certo punto $8\,\mathrm{m}, 7\,\mathrm{m}, 6\,\mathrm{m}, \ldots, 1\,\mathrm{m}$, dopo che tutti si saranno mossi in seguito ad un colpo di grancassa, le distanze tra musicisti consecutivi saranno nuovamente le stesse.
- può essere utile osservare che ogni passo compiuto da ogni musicista ad ogni colpo della grancassa è di lunghezza al massimo $1\,\mathrm{m}$.

Descriviamo ora cosa ha portato all'assegnazione dei vari punteggi, illustrando le caratteristiche degli elaborati tipici per ciascuna fascia di valutazione, con particolare riferimento alle osservazioni e considerazioni parziali riportate sopra.

1. **1 punto:** soluzioni che considerano le distanze fra i musicisti invece delle loro posizioni, e, dopo aver introdotto una notazione per le distanze, procedono a fare qualche manipolazione di queste nuove variabili (tipicamente, scrivendo formule generali per le distanze dopo $n+1$ colpi di grancassa in funzione delle distanze dopo n colpi). Lo stesso punteggio è stato assegnato a chi fa riduzioni simili in termini delle lunghezze dei passi dei musicisti invece che delle distanze reciproche.
2. **2 punti:** ci sono due categorie principali di compiti che corrispondono a questo punteggio. Un modo di ottenere due punti è quello di introdurre nuove variabili (le distanze tra i musicisti o le lunghezze dei loro passi) e dimostrare che i passi sono tutti di lunghezza al massimo un metro. Un secondo modo è quello di riconoscere la rilevanza di un eventuale 'punto fisso' e mettersi seriamente a cercarlo, magari impostando un sistema di equazioni che le distanze devono soddisfare per poterlo realizzare, ma senza arrivare effettivamente a trovarlo.
3. **3 punti:** tipicamente, un compito è stato valutato 3 punti se contiene (solo) una descrizione del punto fisso $8\,\mathrm{m}, 7\,\mathrm{m}, 6\,\mathrm{m}, \ldots, 1\,\mathrm{m}$, indipendentemente da come questo sia stato trovato.
4. **4 punti:** ci sono pochi elaborati con questo punteggio, che corrisponde tipicamente all'aver trovato il punto fisso e fatto qualche ulteriore progresso, o tramite un'analisi approfondita di come evolvano le distanze tra i musicisti (ad esempio: sono sempre crescenti nel tempo e decrescenti rispetto alla posizione del musicista nella fila), oppure dimostrando il fatto che i passi hanno sempre lunghezza al massimo $1\,\mathrm{m}$.
5. **5 punti:** a nessuna prova è stato assegnato questo punteggio.
6. **6 punti:** c'è stato un unico compito con questa valutazione, corrispondente ad una soluzione sostanzialmente corretta, ma in cui la dimostrazione di un lemma importante era incompleta.

Ulteriori commenti.

Abbiamo deciso di non assegnare punti per l'analisi del caso di una fila di tre musicisti.

Segnaliamo il fatto che alcuni elaborati, dopo aver trovato il 'punto fisso', hanno cercato di argomentare che ci dovesse essere una convergenza a tale punto fisso con argomenti analitici (ad esempio: la lunghezza totale della fila cresce sempre, quindi tende ad un limite; tale limite non può essere altro che la lunghezza nel caso del punto fisso) senza mostrare che la successione fosse limitata. Argomenti di questo tipo sono tutti risultati non corretti: è vero che una successione crescente ammette limite, ma questo limite può essere $+\infty$, e l'esistenza di un punto fisso non impedisce questa possibilità. Per un esempio semplice che mostra come una successione crescente possa tranquillamente scavalcare il proprio punto fisso e tendere a $+\infty$, si consideri la funzione (definita sui razionali)

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \text{ è intero non divisibile per 3;} \\ \frac{x+72}{3}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Supponiamo che la lunghezza $\ell(n)$ della fila di musicisti dopo n colpi di grancassa fosse soggetta alla regola $\ell(n+1) = f(\ell(n))$: in tal caso, è facile verificare che se $\ell(n) < 36$ si ha $\ell(n+1) = f(\ell(n)) > \ell(n)$, dunque la lunghezza della fila è crescente nel tempo. Inoltre, è anche facile vedere che la funzione $f(x)$ ha un unico punto fisso, ovvero c'è un'unica soluzione dell'equazione $f(x) = x$: tale soluzione è data da $x = 36$.

Tuttavia, queste informazioni non sono sufficienti a stabilire l'andamento della lunghezza della fila al passare del tempo. Da un lato, se si parte con una fila di lunghezza 8, si ha $\ell(n) = 8 + 3n$, che chiaramente diventa arbitrariamente grande. D'altro canto, se si parte con una fila di lunghezza non intera e minore di 36 (per esempio 1/3), si può effettivamente dimostrare che la lunghezza $\ell(n)$ resta limitata e tende, crescendo, al punto fisso $\ell_\infty = 36$. In effetti, i primi termini sono

$$1/3 \approx 0.333,\ 217/9 \approx 24.111,\ 865/27 \approx 32.037,\ 2809/81 \approx 34.679,\ 8641/243 \approx 35.560,\ 26137/729 \approx 35.853, \ldots$$

Osserviamo inoltre che la situazione del problema proposto nella gara è ben più complicata di quella appena descritta, in quanto la lunghezza della fila dopo $n+1$ colpi di grancassa non era semplicemente una funzione della lunghezza dopo n colpi, ma dipendeva dal dettaglio delle distanze fra tutte le coppie di musicisti. Con strumenti più sofisticati, non è difficile fornire un'argomentazione analitica che mostra che c'è effettivamente convergenza al punto fisso e che questa avviene in modo crescente (ovvero la lunghezza della fila cresce ad ogni colpo della grancassa, avvicinandosi sempre più a[1] 36 m, ma senza raggiungere questo valore). Tuttavia, la traduzione più semplice di queste dimostrazioni in linguaggio elementare riconduce sostanzialmente alla soluzione ufficiale: se ad un certo punto le distanze fra i musicisti non superano rispettivamente 8 m, 7 m, 6 m, ..., 1 m, allora la stessa affermazione rimane vera dopo un colpo di grancassa. Si noti infine che questa argomentazione, di per sé, non mostra che la lunghezza tende effettivamente a 36 m, ma una volta che è noto che la lunghezza rimane limitata, non è difficile mostrare che in effetti deve tendere a questo valore.

[1] Misuriamo la lunghezza della fila una volta che tutti i musicisti si sono spostati.