

Un problema di uccelli

Dalla antica Cina a Fibonacci e ai tempi nostri

Daniele C. Struppa

Parker Kennedy Chair in Mathematics

Chapman University



Nella Cina del quinto secolo



Le origini del problema: Zhang Qiujian (Cina, 5° secolo d.C.)

Zhang Qiujian Suanjing (I Classici Matematici di Zhang Qiujian)

Capitolo 3, problema 38: *Un gallo costa cinque qian, una gallina tre qian e tre pulcini un qian ciascuno. Quanti se ne possono comperare, cento in totale, con cento qian?*

$5x+3y+\frac{1}{3}z=100$ con la restrizione che $x+y+z=100$.

La soluzione ed il 'metodo' di Zhang Qiujian

$5x+3y+\frac{1}{3}z=100$ con la restrizione che $x+y+z=100$.

Soluzioni: (4, 18, 78), (8, 11, 81), (12, 4, 84).

Metodo: Aggiungi 4 al numero dei galli, sottrai 7 dal numero delle galline e aggiungi 3 al numero dei pulcini

Come lo risolveremmo noi:

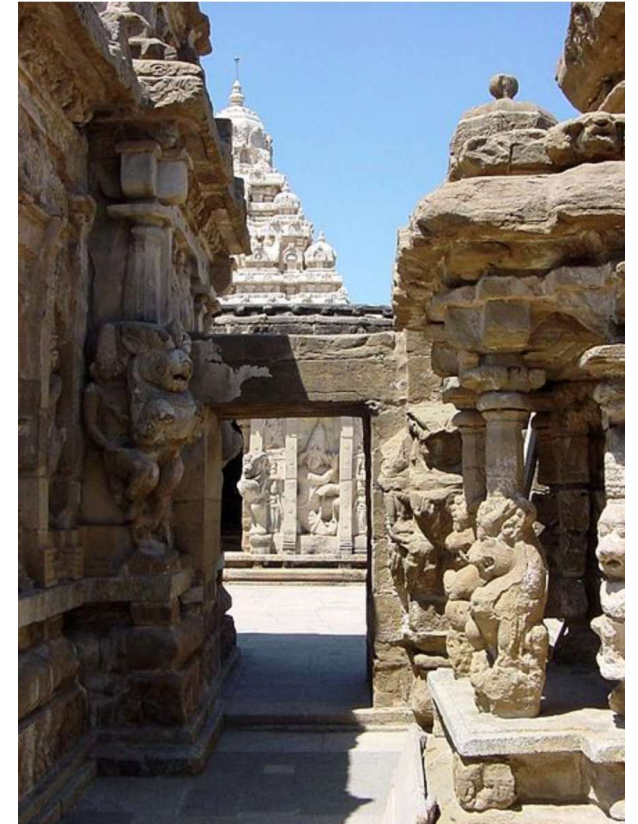
Sottraiamo $x+y+z=100$ da $15x+9y+z=300$ and dividiamo per due per ottenere $7x+4y=100$.

Poichè $(4,7)=1$, abbiamo infinite soluzioni della forma $x=4+4t$, $y=18-7t$, perchè $7(4+4t)+4(18-7t)=100+28t-28t=100$, e quindi $z=78+3t$.

Le uniche soluzioni che il nostro problema accetta sono dunque $(4, 18, 78)$, $(8, 11, 81)$, $(12, 4, 84)$, corrispondenti agli unici valori accettabili di $t=0, 1, 2$.

Note: La soluzione come descritta sopra sembra spiegare il 'metodo' di Zhang Quiujian.

Nell'India meridionale del nono secolo: l'impero Rashtrakuta e il jainismo



Il problema ritorna: Mahāvīrāchārya (India, 9° secolo d.C.)

Ganitasarasangraha (Compendio dell'Essenza della
Matematica), Capitolo VI, paragrafi 151-152-153

*Cinque piccioni costano tre panas, sette gru costano
cinque panas, nove cigni costano sette panas, e tre
pavoni costano nove panas. Ad un uomo fu chiesto di
comperare cento uccelli per cento panas e di portarli al
figlio del re. Quanti uccelli dei vari tipi compererà?*

$$\frac{3}{5}x + \frac{5}{7}y + \frac{7}{9}z + \frac{9}{3}w = 100$$

$$x + y + z + w = 100$$

Cenno alla soluzione di Mahāvīrāchārya

$x=5a, y=7b, z=9c, w=3d$. Quindi

uccelli $5a+7b+9c+3d=100$

costo uccelli $3a+5b+7c+9d=100$

Sottraendo $2a+2b+2c-6d=0$ (o $a+b+c-3d=0$)

Un po' di tentativi ed il fatto che $a+b+c$ sia un multiplo di 3 porta a

$(a,b,c,d)=(3,4,5,4)$ e quindi $(x,y,z,w)=(15,28,45,12)$

5	7	9	3
3	5	7	9
<hr/>			
500	700	900	300
300	500	700	900
<hr/>			
0	0	0	600
200	200	200	0
<hr/>			
0	0	0	6
2	2	2	0
<hr/>			
0	0	0	36
6	8	10	0
<hr/>			
6			
4			
-			
4			
6			
-			
6	6	6	4
6	6	6	4
<hr/>			
18	30	42	36
30	42	54	12
<hr/>			
3	5	7	6
5	7	9	2
<hr/>			
9	20	35	36
15	28	45	12

Come lo risolveremmo noi

Partiamo da $a+b+b-3d=0$

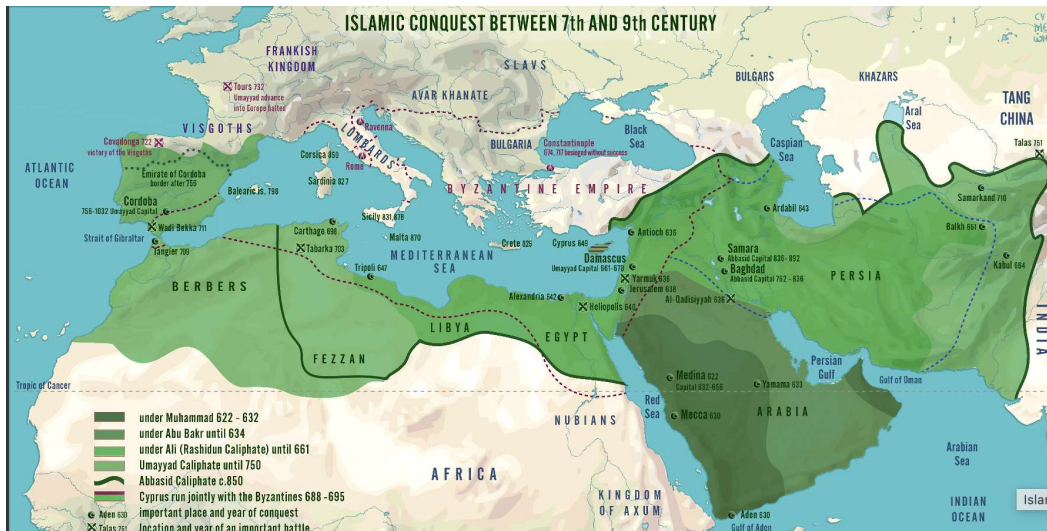
Questa equazione ha tre soluzioni indipendenti

$(1,0,0,1/3)$, $(0,1,0,1/3)$, $(0,0,1,1/3)$

Allora la soluzione generale sarà del tipo $(p,q,r, (p+q+r)/3)$.

Sapendo che $3a+5b+7d+9c=100$ otteniamo $6p+8q+10r=100$ e la soluzione di Mahāvīrāchārya si ottiene con $p=3$, $q=4$, $r=5$.

L'Islam nel nono secolo: Baghdad e la Casa della Saggezza (Bayt al-Hikmah)



Una nuova versione problema: Abu Kamil (Baghdad, circa 850-930)

Problema 6 del *Kitab al-Tair* (*Libro degli Uccelli*)

Con cento dirham si comperano cento uccelli di quattro tipi: un oca per quattro dirham, una gallina per un dirham, due piccioni per un dirham, e dieci storni per un dirham.

$$4x + y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{10}w = 100$$

$$x + y + z + w = 100$$

Ci sono 98 soluzioni. Quella con il più piccolo valore di x è $(2, 90, 3, 5)$

L'approccio di Abu Kamil's (in linguaggio moderno)

Da $4x+y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{10}w = 100$ e $x+y+z+w = 100$, per sottrazione otteniamo

$$3x - \frac{1}{2}z - \frac{9}{10}w = 0, \text{ cioè } x = \frac{1}{6}z + \frac{3}{10}w$$

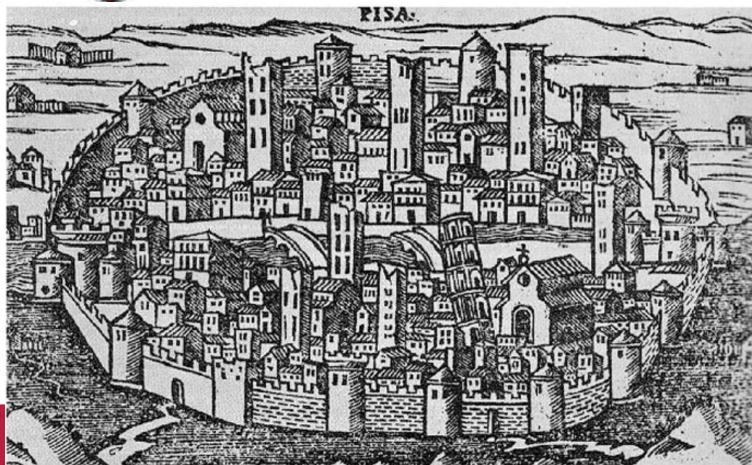
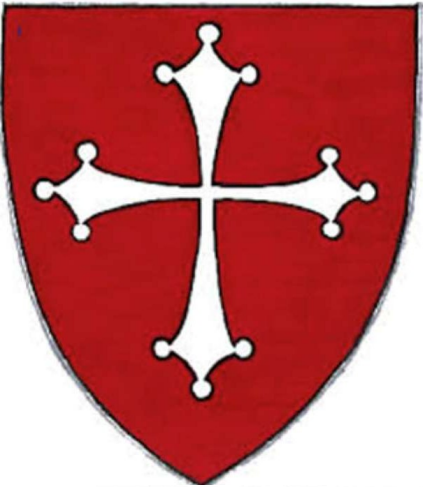
Allora ci sono due casi:

$$z=6n, w=10m, \text{ oppure } z=6n+3, w=10m+5.$$

Con un po' di conti si ottiene che ci sono 98 soluzioni.

Quella con il più piccolo valore di x è $(2, 90, 3, 5)$

La penisola italiana nel 1200: l'uscita dai secoli bui...l'Imperatore Federico II



Fibonacci (Pisa, circa 1170-1250)

Lettera a Mastro Teodoro, 1225 e Liber Abaci, 1202 (capitolo XI)

Un uomo compera trenta uccelli, pernici, piccioni, e passeri, per trenta denari. Una pernice costa tre denari, un piccione due denari, e due passeri un denaro... Quanti uccelli ha comperato di ogni tipo?

$$3x+2y+\frac{1}{2}z=30$$
$$x+y+z=30$$

Un'unica soluzione: $x=3$, $y=5$, $z=22$

Cosa fa Fibonacci?

Un passo indietro...i problemi di conio

Abbiamo monete con 2 onces di argento ed altre con 9 onces e vogliamo fare monete con 5 onces, in breve **P(2,9;5)**

$$2x+9y=5(x+y) \rightarrow 3x-4y=0 \rightarrow x=4, y=3$$

3	4
silver	silver
oz.	oz.
9	2
	5

Il caso di tre monete

Abbiamo monete con 3 onces, altre con 4, e altre con 6, e vogliamo fare monete con 5 onces,
 $P(3, 4, 6; 5)$

$$3x+4y+6z=5(x+y+z) \quad \text{cioè} \quad 2x+y-z=0$$

Pongo $y=0$, e trovo $2x-z=0 \rightarrow x=1, z=2 \rightarrow (x,y,z)=(1,0,2)$

Pongo $x=0$, e trovo $y-z=0 \rightarrow y=1, z=1 \rightarrow (x,y,z)=(0,1,1)$

Sommando le due soluzioni si ottiene: $x=1, y=1, z=3$.

Spiegazione 'moderna'

$\{(x,y,z) : 3x+4y+6z=5(x+y+z)\}$ e' un sottospazio di \mathbb{R}^3 di dimensione 2

I vettori $(1,0,2)$ e $(0,1,1)$ sono una sua base

Tutte le soluzioni si trovano come $x=t$, $y=s$, $z=2t+s$, e $(1,1,3)$ e' la piu' piccola soluzione

Possibile teorema

Tutte le soluzioni del problema del conio si possono scrivere come combinazioni lineari intere di due soluzioni ottenute mettendo a zero una delle variabili

Controesempio: $P(2,7,9;5)$

$$2x+7y+9z=5(x+y+z) \quad \text{cioè} \quad 3x-2y-4z=0$$

Poniamo $y=0$ e otteniamo $(x,y,z)=(4,0,3)$

Poniamo $z=0$ e otteniamo $(x,y,z)=(2,3,0)$

Ma la soluzione più piccola è $(x,y,z)=(2,1,1)$, che **non** si può ottenere con le due soluzioni precedenti

Un nuovo problema: $P_\alpha(a_1, \dots, a_n; r)$

Vogliamo creare delle monete con r onces di argento a partire da monete con a_1, \dots, a_n onces di argento, usando α monete.

Questo corrisponde al sistema

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = r(x_1 + \dots + x_n)$$

$$x_1 + \dots + x_n = \alpha$$

Nota: a differenza di $P(a_1, \dots, a_n; r)$, il problema $P_\alpha(a_1, \dots, a_n; r)$ non ha sempre soluzioni intere.

L'intuizione di Fibonacci

Il problema degli uccelli è lo stesso problema del conio con quantità assegnata di metallo e si può quindi risolvere con il metodo precedente

Spiegando l'intuizione di Fibonacci

Infatti, il sistema

$$3x+2y+\frac{1}{2}z=30 \text{ and } x+y+z=30$$

può essere riscritto come

$$6x+4y+z=2(x+y+z)$$

cioè

$$4x+2y-z=0$$

che è risolto da $(1,0,4)$ e $(0,1,2)$, quindi tra le sue soluzioni si trovano anche $(3,0,12)$, e $(0,5,10)$ e imponendo $x+y+z=30$ otteniamo

$$x=3, y=5, z=22.$$

Relazione tra i due problemi. conio: $P(a,b,c;r)$; uccelli: $P_s(a,b,c;r)$

Problema conio: $ax+by+cz=r(x+y+z)$ (a,b,c,r interi) $P(1,4,6;2)$

Problema uccelli: $\alpha x+\beta y+\gamma z=s$; $x+y+z=s$ (α,β,γ razionali) $P_{30}(1,4,6;2)$

Eliminando i denominatori, e chiamando r il denominatore comune, il problema degli uccelli diventa

$$ax+by+cz=r(x+y+z), \quad x+y+z=s$$

Ecco l'importanza che il numero di uccelli sia lo stesso dei soldi spesi!

$P(a,b,c;r)$ ha sempre soluzione,
 $P_s(a,b,c;r)$ no

Fibonacci scrive:

Si vede quindi che si possono comperare un qualsiasi numero di uccelli con 15 soldi o più, ma se si hanno meno di 15 denari si possono solo comperare 13, 11, o 8 uccelli.

Quindi Fibonacci cerca di capire quando sia possibile risolvere $P_s(1,4,6;2)$ e conclude che il problema è sempre risolubile per $s \geq 15$ oppure $s = 13, 11, 8$.

Ma è vero quello che scrive Fibonacci?

$x+4y+6z=2(x+y+z)$; $x+y+z=s$ dalla quale si ottiene

$$x-2y-4z=0$$

Due soluzioni minimali sono $m_1=(2,1,0)$ e $m_2=(4,0,1)$ e poichè le loro cardinalità sono 3 e 5, gli unici valori di s per cui il problema $P_s(1,4,6;2)$ ha soluzioni sono quelli in

$$C^*=\{3p+5q: p,q \text{ interi positivi}\}=\{8, 11, 13, \mathbf{14}, 16, 17, 18, \dots\}$$

Quale è il problema generale?

Dati interi positive a_1, \dots, a_n senza fattori comuni, vogliamo sapere quali sono gli interi positivi che appartengono a

$$C^* = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, \lambda_i \text{ interi positivi}\}$$

Chiaramente, se prendo λ_i in \mathbb{Z} ottengo tutto \mathbb{Z} , ma cosa succede se studio

$$C = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, \lambda_i \text{ interi non-negativi}\}?$$

Un teorema, un problema, e un altro teorema

Teorema. Ogni intero sufficientemente grande appartiene a

$$C = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, \lambda_i \text{ interi non-negativi}\}.$$

Problema (Problema Lineare Diofanteo di Frobenius). Come si può determinare il più piccolo intero $G(a_1, \dots, a_n)$ appartenente a C in funzione di a_1, \dots, a_n ?

A tutt'oggi il problema generale è irrisolto

Teorema. $G(a, b) = (a-1)(b-1) \dots$ ecco come appare 8 in Fibonacci!

L'incontro con l'Imperatore: Master Johannis

- Alla presenza dell'Imperatore, Master Johannis di Palermo pone un problema assai difficile. Trovare x^2 tale che x^2+5 ed x^2-5 siano ancora dei quadrati
- Fibonacci riconosce il problema come uno dato da **Abu Ja'far al-Khazin** (matematico arabo intorno al 950, cui Fibonacci deve molte delle sue osservazioni)
- Fibonacci resolve il problema e lo generalizza: per quali numeri c e' possibile trovare x^2 tale che x^2+c ed x^2-c sono quadrati? Questi numeri in termini moderni si chiamano congruenti. Una teoria assai importante e non banale.

Conclusioni

- Il lavoro di Fibonacci si inserisce in un filone assai ricco, che risale addirittura al 400 d.C.
- Fibonacci identifica un metodo generale per il problema del conio (il suo metodo adombra idee di algebra lineare). Mahāvīrāchārya sembra aver esplorato idee assai simili.
- Fibonacci scopre che il problema degli uccelli è un caso del problema del conio con un'equazione in più, e quindi non sempre risolubile
- Cerca poi (e riesce parzialmente) a generalizzare il problema degli uccelli ad un numero diverso da 30
- Il caso più generale, però, con più uccelli come con Abu Kamil e Mahāvīrāchārya, ci conduce ad un problema aperto di teoria dei numeri, il problema lineare diofanteo di Frobenius