Unione Matematica Italiana

XXVII Gara Nazionale a Squadre

Finale Nazionale – Sabato 9 Maggio 2026

Ministero dell'Istruzione e del Merito

- Per ogni problema, indicare sul cartellino delle risposte un intero compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero, dove non indicato diversamente, si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è maggiore di 9999, si indichino le ultime quattro cifre della sua parte intera.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \qquad \sqrt{3} = 1.7321 \qquad \sqrt{5} = 2.2361 \qquad \sqrt{7} = 2.6458 \qquad \pi = 3.1416.$$

Scadenze importanti

- **10 minuti dall'inizio**: termine per la scelta del problema Jolly (dopo verrà dato d'ufficio il primo problema).
- **30 minuti dall'inizio**: termine per rivolgere domande sul testo.
- **120 minuti dall'inizio**: termine della gara.

Ringraziamenti. La scrittura di tutti i testi riguardanti la fase finale delle Gare a Squadre ha richiesto l'aiuto di molteplici persone, nei ruoli di proposizione dei problemi, correzione dei problemi, ambientazione, beta-testing, logistica e aiuto informatico.

Ringraziamo dunque tutti i collaboratori: Leonardo Angelini, Federico Antonini, Davide Averoldi, Edoardo Balistri, Frascesco Belletti, Giorgia Benassi, Lorenzo Benedini, Riccardo Bergamaschi, Sebastiano Boscardin, Fabrizio Brioni, Alberto Cagnetta, Nicola Caravaggi, Michele Casella, Mattia Celante, Lorenzo Cortesi, Antonio Giulio D'Antona, Daniele De Pietri, Roberto Deferrari, Lorenzo Degli Atti, Nikita Deniskin, Stefano Di Iulio, Matteo Faini, Filippo Falqui Cao, Marco Fantozzi, Maria Faro, Alessandro Fenu, Simone Fisichella, Massimiliano Foschi, Simone Foti, Gaia Fuselli, Giacomo Gallina, Angelo Giustiniani, Matteo Gori, Pietro Gualdi, Silvia Kuzmin, Francesco Laganà, Luca Lamanna, Gaetano Laudando, Lorenzo Leka, Guido Lido, Fabio Lilliu, Alessandro Lombardo, Caterina Malfatto, Fabio Marconi, Giovanni Marzenta, Giuseppe Mascellani, Andrea Matiacic, Lorenzo Mondini, Riccardo Morandin, Riccardo Moraschi, Matteo Musumeci, Eleonora Renzulli, Andrea Rossetti, Alberto Saracco, Luca Sartori, Pietro Scaglioni, Alice Simonazzi, Edoardo Siniscalco, Giordano Sorrentino, Giovanni Tallia, Lucio Tanzini, Marco Targia, Alessandro Tedeschi, Roberto Tocco, Eugenio Trovarelli, Denis Tusca, Giulio Verzeletti, Lorenzo Weiss, Valentino Zhou.

Ringraziamo chi ha ambientato i testi: Mara Barucco, Simone Di Marino, Silvia Pagani, Eugenio Trovarelli.

Un ringraziamento per il sostegno informatico e logistico a Maurizio Paolini, Federico Poloni e Matteo Protopapa.

Un grazie particolare a coloro che hanno selezionato i testi: Mara Barucco, Simone Di Marino, Leonardo Franchi, Matteo Migliorini, Silvia Pagani, Giovanni Paolini, Marco Trevisiol.

Prima parte: Il cielo di Berkhoff

«Questa è *Berkhoff*: si trova 12 giorni a nord di Interpolazione, esattamente sul Meridiano della Misura. Nel mio villaggio abbiamo la pesca, la matematica e un'incantevole vista del tramonto. L'unico problema sono le infestazioni: in molti posti hanno pulci saltellanti o formiche alfabetarie, noi abbiamo...»

1. ... i draghi! — *Caterina Malfatto*

Dopo l'ennesimo attacco dei draghi, tutti i 1000 vichinghi del villaggio di Berkhoff si riuniscono attorno a una tavola rotonda per discutere le strategie di difesa. Alcuni di loro sono *vichinghi leali*, che dicono sempre la verità, mentre altri sono *vichinghi imbroglioni*, che mentono sempre. A turno, ciascuno di loro dichiara: «In totale, tra i due vichinghi seduti alla mia destra e i due vichinghi seduti alla mia sinistra, c'è un numero pari di vichinghi leali». Qual è il numero minimo possibile di vichinghi leali?

Soluzione 1. Se considero 5 vichinghi consecutivi, essi non possono essere tutti imbroglioni; infatti se lo fossero, il vichingo centrale avrebbe 0 vichinghi leali seduti in totale alla sua destra e alla sua sinistra, e quindi non può essere imbroglione, perché dichiarerebbe il vero. Raggruppando i vichinghi a 5 a 5 troviamo che ci sono dunque almeno 200 vichinghi leali. Inoltre la configurazione *Imbroglione-Imbroglione-Leale-Imbroglione-Imbroglione* ripetuta è valida quindi il minimo è effettivamente 200.

Soluzione 2. Se considero 5 vichinghi consecutivi, il numero dei vichinghi leali è necessariamente dispari, poiché se il vichingo al centro è leale allora il numero totale è $1+\text{pari}$, e altrimenti è $0+\text{dispari}$. Di conseguenza, due qualsiasi vichinghi a distanza 5 sono entrambi leali o entrambi imbroglioni. Estendendo questo ragionamento, due qualsiasi vichinghi a distanza multipla di 5 sono entrambi leali o entrambi imbroglioni. Una configurazione valida deve quindi essere periodica di periodo 5, con un numero dispari di vichinghi leali in ogni intervallo di 5 consecutivi. Viceversa, queste configurazioni sono tutte ammissibili. Il minimo numero possibile di vichinghi leali è dunque 1 ogni 5, per un totale di 200.

2. Fourier Buia — *Federico Antonini*

Durante l'attacco dei draghi a Berkhoff, Hilcup tenta di colpire una *Fourier Buia* con una delle sue improbabili invenzioni. Studiando il volo della Fourier Buia, si ritrova a considerare la disequazione

$$(k+1-t)t \geq 3\left(\frac{k(k+1)}{2}+t\right).$$

«L'ho presa!» esclama Hilcup, ma quando lo racconta agli altri nessuno gli crede. Così, mentre suo padre lo rimprovera, ripensa alla disequazione appena studiata e si domanda: «Qual è il minimo intero positivo k per cui esiste un intero positivo t che la soddisfa?».

Soluzione. Soluzione. Per ogni coppia di numeri reali a,b si ha $(a-b)^2 \geq 0$, e quindi equivalentemente

$$4ab \leq (a+b)^2.$$

Applicando questa disuguaglianza con $a = k+1-t$ e $b = t$, otteniamo

$$(k+1-t)t \leq \frac{(k+1)^2}{4}.$$

D'altra parte, siccome t è positivo, il membro destro della disequazione è almeno $3\cdot\frac{k(k+1)}{2}$. Quindi, perché la disequazione possa essere soddisfatta, dovrebbe valere

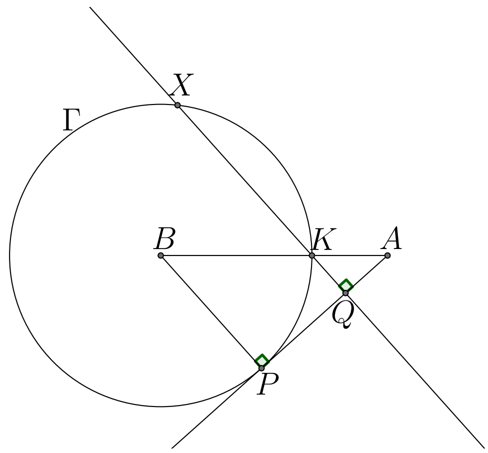
$$\frac{(k+1)^2}{4} \geq \frac{3k(k+1)}{2}.$$

Poiché k è positivo, possiamo dividere per $k+1$ e ottenere $k+1 \geq 6k$, cioè $1 \geq 5k$, impossibile. Dunque non esiste alcun intero positivo k per cui la disequazione sia soddisfatta, e la risposta è 0000.

3. Quello scudo è mio! — *Francesco Laganà*

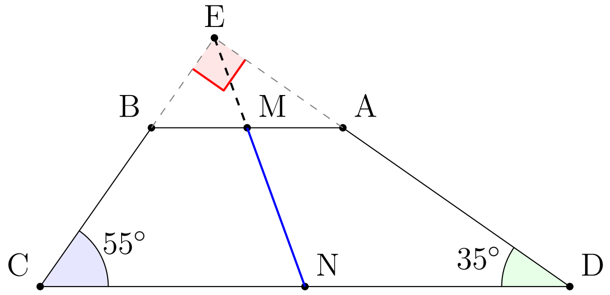
«Se siete costretti a scegliere tra una spada e uno scudo, prendete lo scudo», ripete Scalarchio ai giovani apprendisti nell'*Arena dei Draghi*. Nel mentre, Θ(tufo) e Θbruta stanno già litigando per stabilire chi debba impugnare un particolare scudo da addestramento, sul cui fronte compare un disegno: AB è un segmento di lunghezza 108 cm, mentre Γ è una circonferenza di centro B e raggio 72 cm. «K è il punto di intersezione di Γ con AB» urla Θ(tufo). «P è uno dei due punti di Γ per cui AP è tangente a Γ» risponde Θbruta. Sono infine evidenziati il punto Q, che è la proiezione ortogonale di K sulla retta AP, e il punto X, che è l'ulteriore intersezione della retta QK con Γ. Quanti centimetri misura QX?

Soluzione. Essendo AP tangente a Γ, $\triangle ABP$ é un triangolo rettangolo con $AB = 108$ e $BP = 72$. $\triangle AKQ$ é a sua volta un triangolo rettangolo con $AK = AB - BK = 36$. Osserviamo che questi due triangoli sono simili, quindi $KQ = 24$. Grazie al teorema di Pitagora, abbiamo quindi $AQ = 12\sqrt{5}$ e $AP = 36\sqrt{5}$. Sfruttiamo infine il teorema della secante e della tangente per scrivere $QP^2 = QK \cdot QX$; $QX = \frac{(AP-AQ)^2}{QK} = \frac{(24\sqrt{5})^2}{24} = 120$.



4. Ala artificiale ***Leonardo Franchi***

«Perché non riesci a volare via?», si domanda Hilcup osservando la Fourier Buia che ha colpito. Abbozzandone uno schizzo sul suo quadernetto, si accorge che al drago manca un'ala posteriore, a forma di trapezio $ABCD$, con base maggiore CD e base minore AB. Hilcup calcola che $AB = 20\ dm$, $CD = 80\ dm$, e che gli angoli in C e D misurano rispettivamente 55° e 35°. Per costruire un'ala artificiale, deve determinare la lunghezza di MN, dove M e N sono i punti medi di AB e CD, rispettivamente. Quanti decimetri misura MN?



Soluzione. Prolunghiamo i lati obliqui AD e BC che si incontrano in E: notiamo che il triangolo ECD, avendo come angoli alla base 55° e 35°, avrà l'ultimo angolo che sarà di 90°, e quindi il triangolo risulta essere rettangolo. In particolare $EN = NC = ND = 40\ dm$. Per Talete inoltre si ha $EN : EM = DN : AM = CD : AB = 4$ e quindi $EM = 10\ dm$ e $MN = 30\ dm$.

5. L'Orripilante Biiezione ***Giuseppe Mascellani***

Moduloso e Nashtrid stanno allenando la loro capacità di fare più cose contemporaneamente nell'arena. Nello sconfiggere il drago *Orripilante Biiezione*, devono anche usare tutte le cifre da 1 a 9 una sola volta per comporre tre numeri di tre cifre che risultino *autodivisibili*. «Un numero si dice autodivisibile se è multiplo di ciascuna delle proprie cifre» spiega Scalarchio. Tra tutte le possibili soluzioni, Nashtrid trova la terna di numeri con somma massima S, mentre Moduloso trova quella con somma minima s. Quanto vale $S+s$?

Soluzione. Sicuramente il 5 dovrà essere cifra delle unità del numero dove compare. Consideriamo ora il numero abc dove compare la cifra 9: necessariamente le altre due cifre sommano a 9 e quindi sono uno tra $\{1,8\}$, $\{2,7\}$, $\{3,6\}$ o $\{4,5\}$. Osserviamo che la cifra pari dovrà essere necessariamente quella delle unità visto che le altre due cifre sono dispari: unendo questa alla prima osservazione possiamo escludere il caso $\{4,5\}$. Invece osserviamo che 8 non è un divisore né di 198 né di 918, mentre 7 non è un divisore né di 792 né di 972. Quindi il numero abc è necessariamente 936 oppure 396 che risultano entrambi *autodivisibili*. Per quanto detto prima il numero def dove compare la cifra 5 deve avere solo cifre dispari quindi può essere solo 175 o 715, e solo 175 risulta *autodivisibile*. Il restante numero ghi avrà come cifre $\{2,4,8\}$ e essendo divisibile per 8 le ultime due cifre devono essere divisibili per 8 e quindi possono essere solo 248 o 824. Dunque la somma massima e minima sono $936+175+824$ e $396+175+248$ e dunque $S+s = 2754$.

6. Mancato! ***Davide Averoldi***

«Attenta, ci penso io!» esclama Moduloso rivolto a Nashtrid, mentre lancia un'accetta contro un drago e lo manca completamente. «Avevo il sole negli occhi! Però almeno so determinare tutte le coppie di interi non negativi (m,n) che soddisfano $4m!+1 = 2^n+3^n$». *Sia* (a,b) *la somma componente per componente di tutte le coppie trovate; dare come risposta* $a \cdot b$. *Si ricorda che* $m! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots m$, *mentre* $0! = 1$.

Soluzione. Supponiamo $m \geq 5$: allora $4m!+1$ ha resto 1 nella divisione per 5. Ma se n è dispari ovviamente $5|2^n+3^n$. Invece se $n = 2k$ è pari si ha $2^{2k}+3^{2k} \equiv 2^{2k}+(-2)^{2k} \equiv 2\cdot 4^k$ che però può avere resto solo 2 o 3. In entrambi i casi non esistono soluzioni. Ma allora $0 \leq m \leq 4$ e dunque $4m!+1$ può assumere solo i valori $5, 9, 25, 97$ mentre 2^n+3^n può assumere solo i valori $2, 5, 13, 35, 97, \ldots$. Quindi le sole soluzioni sono $(m,n) \in \{(0,1),(1,1),(4,4)\}$ dunque $(a,b) = (5,6)$ e quindi $a\cdot b = 30$.

7. Cronache di Berkhoff ***Andrea Rossetti***

Γ(pesce) sta leggendo le cronache di Berkhoff e delle incursioni dei draghi che hanno colpito il villaggio. Mentre confronta con attenzione le date annotate nei registri, si accorge di una curiosa regolarità: avviene un'incursione in ogni anno la cui somma delle cifre è uguale al doppio della somma delle cifre dell'anno successivo. «Quali sono allora il primo e l'ultimo anno in cui avverrà un'incursione, tra il 2000 e il 2999?» si chiede Γ(pesce). *Dare come risposta la somma dei due numeri trovati.*

Soluzione. Sia $S(n)$ la somma delle cifre di n. Vogliamo avere che $S(n) = 2\cdot S(n+1) > S(n+1)$; in particolare l'ultima cifra di n deve essere 9. Dunque $n = 2ab9$. Considerando la congruenza modulo 9 si ha che $2\cdot S(n)+2 \equiv 2\cdot S(n+1) \equiv 2S(n)$ e dunque $S(n) \equiv 7$ cioé $2+a+b \equiv 7 \pmod 9$. In particolare $a+b = 5$ o 14, ma quest'ultimo caso è impossibile poiché avremmo che $S(n) = 25$ non è pari. Gli altri casi sono $2059, 2149, 2239, 2329, 2419, 2509$ che vanno bene. La soluzione è allora 4568.

8. Sbuffo infuocato *Gaia Fuselli*

Con uno sbuffo infuocato, Stellato ha cancellato parte degli appunti di Hilcup! Ciò che rimane sono i due polinomi $p(x) = x^2 + \star x + 1$ e $q(x) = x^2 + x + \star$, dove $\star$ indica un coefficiente ormai illeggibile. Hilcup ricorda però che i coefficienti cancellati nei due polinomi erano uguali e che i polinomi avevano almeno una radice reale in comune. Qual è il massimo valore che può avere $q(0)^2$?

Soluzione. Indichiamo con a il coefficiente cancellato. Allora

$$p(x) = x^2 + ax + 1, \qquad q(x) = x^2 + x + a.$$

Supponiamo che i due polinomi abbiano una radice reale comune r. Sottraendo le due equazioni $p(r) = 0$ e $q(r) = 0$, otteniamo $(a-1)r + 1 - a = 0$, cioè

$$(a-1)(r-1) = 0.$$

Quindi $a = 1$ oppure $r = 1$. Se $a = 1$, allora $p(x) = q(x) = x^2 + x + 1$, che non ha radici reali. Dunque deve essere $r = 1$. Sostituendo in $p(r) = 0$ otteniamo $1 + a + 1 = 0$, da cui $a = -2$. Quindi $q(0) = a = -2$, e perciò $q(0)^2 = 4$. La risposta è 0004.

9. Figlio di un mezzo troll *Fabio Lilliu*

Nashtrid osserva con crescente fastidio i continui progressi di Hilcup: non solo è diventato sorprendentemente bravo con i draghi, ma pare cavarsela fin troppo bene anche con la matematica. Per metterlo alla prova, decide di proporgli un quesito: «Quanti sono i polinomi di terzo grado a coefficienti interi per cui tutte e tre le radici sono interi di una sola cifra, tutti i coefficienti sono anch'essi interi di una sola cifra e il coefficiente di grado tre è esattamente uno?». Hilcup chiede: «Posso usare anche interi negativi?», a cui Nashtrid risponde: «Certo, tutti gli interi tra -9 e 9». Neanche il tempo di finire, che Hilcup già ha risolto il problema. «Figlio di un mezzo troll!» urla Nashtrid spazientita. Qual è la risposta al quesito di Nashtrid?

Soluzione. Siano r, s, t le tre radici, contate con molteplicità. Il polinomio è

$$(x-r)(x-s)(x-t) = x^3 - (r+s+t)x^2 + (rs+rt+st)x - rst.$$

Quindi dobbiamo contare le terne *non ordinate* (r, s, t) di interi tra -9 e 9 tali che

$$|r+s+t| \leq 9, \qquad |rs+rt+st| \leq 9, \qquad |rst| \leq 9.$$

Se due radici sono 0 (diciamo $s = t = 0$), otteniamo che qualsiasi r con $|r| \leq 9$ è ammissibile (19 scelte).

Se esattamente una delle radici è 0 (diciamo $t = 0$), otteniamo le condizioni $|r+s| \leq 9$ e $|rs| \leq 9$. Se r ed s hanno segno opposto (diciamo $r > 0$ ed $s < 0$), è sufficiente la condizione $|rs| \leq 9$, e otteniamo le coppie con $r = 1$ e $-9 \leq s \leq -1$, $r = 2$ e $-4 \leq s \leq -1$, $r = 3$ e $-3 \leq s \leq -1$, $r = 4$ e $-2 \leq s \leq -1$, o infine $5 \leq r \leq 9$ e $s = -1$ (in totale, $9+4+3+2+5 = 23$ scelte). Se invece r ed s hanno lo stesso segno, per simmetria basta contare i casi con $r \geq s \geq 1$ e poi raddoppiare. Le condizioni diventano $r + s \leq 9$ e $rs \leq 9$. Quindi possiamo avere solo $s = 1$ e $1 \leq r \leq 8$, $s = 2$ e $2 \leq r \leq 4$, $s = 3$ e $r = 3$ ($8+3+1 = 12$ coppie positive, e quindi 24 coppie in tutto). I casi con una sola radice nulla sono dunque $23 + 24 = 47$.

Resta il caso in cui nessuna radice sia 0. Ordinando i valori assoluti, possiamo supporre $1 \leq |r| \leq |s| \leq |t|$ e dalla condizione $|rst| \leq 9$ segue che le sole possibilità per $(|r|, |s|, |t|)$ sono: $(1,1,k)$ per $1 \leq k \leq 9$; $(1,2,2)$; $(1,2,3)$; $(1,2,4)$; $(1,3,3)$; $(2,2,2)$.

Per la famiglia $(1,1,k)$ distinguiamo i segni. Per $k = 1$ dobbiamo scegliere il numero di radici uguali a 1 e il numero di radici uguali a -1, per un totale di 4 terne ammissibili. Per $k \geq 2$, se le due radici di valore assoluto 1 hanno segno opposto, allora $rs + rt + st = -1$ e ci sono sempre 2 possibilità per il segno della terza radice. Se invece hanno lo stesso segno ma la terza radice ha segno opposto, allora $|rs + rt + st| = |1 - 2k| \leq 9$, quindi $k \leq 5$, e otteniamo altre 2 possibilità per ciascun k. Infine, se tutti e tre i segni coincidono, allora $|rs + rt + st| = 1 + 2k \leq 9$, quindi $k \leq 4$, e abbiamo 2 possibilità per ciascun k. In totale questa famiglia contribuisce con $4 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 34$ terne.

Per $(|r|, |s|, |t|) = (1,2,2)$ tutte le 6 scelte di segno producono terne ammissibili. Per $(1,2,3)$ sono ammissibili tutte e sole le terne in cui non tutti i segni coincidono, quindi otteniamo 6 terne. Per $(1,2,4)$ le sole possibilità sono quelle in cui il segno diverso dagli altri è quello della radice di valore assoluto 1 oppure quello della radice di valore assoluto 2, per un totale di 4 terne. Per $(1,3,3)$ si ottengono 4 terne, mentre per $(2,2,2)$ si ottengono soltanto le due terne $(-2,-2,2)$ e $(-2,2,2)$.

Dunque i casi senza radici nulle sono $34 + 6 + 6 + 4 + 4 + 2 = 56$. In totale ci sono $19 + 47 + 56 = 122$ polinomi e la risposta è quindi 0122.

10. In volo *Marco Targia*

Nashtrid ha scoperto il nascondiglio di Stellato! Per convincerla che è un drago amichevole, Hilcup la porta a fare un volo in sua compagnia. I due, però, non si accorgono che Stellato si sta dirigendo verso l'arcipelago di cui fa parte anche l'*Isola dei Draghi*. Il suo percorso si può rappresentare sul piano cartesiano: parte dal punto $(0,0)$, mentre le 1501 isole dell'arcipelago si trovano nei punti (n,n) con $1500 \leq n \leq 3000$. Il drago può muoversi soltanto in direzioni parallele agli assi cartesiani verso destra oppure verso l'alto, e non in diagon... dragonale. Inoltre, al k-esimo battito d'ali percorre esattamente k unità di lunghezza: il primo spostamento è lungo 1, il secondo 2, il terzo 3, e così via (Stellato si muove tra punti a coordinate intere). Quali sono le isole dell'arcipelago che può raggiungere in questo modo? *Indicare quante ne sono.*

Soluzione. Dopo k passi, la lunghezza totale percorsa sarà $1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ e perché sia raggiunta l'isola in (n,n) è necessario che $\frac{k(k+1)}{2} = 2n$ e dunque che k o $k+1$ sia multiplo di 4. Siccome n è compreso tra 1500 e 3000, si ha che k è compreso tra 79 e 108. Non resta che verificare che in tutti questi casi si possa effettivamente raggiungere (n,n), ovvero che si possano ripartire equamente gli spostamenti tra orizzontali e verticali.

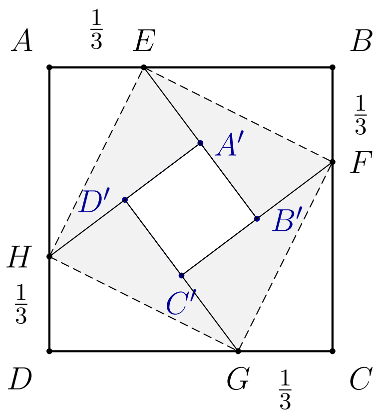
Se k è multiplo di 4, ci si può muovere in orizzontale per tutti i passi congrui a 0 o 1 modulo 4 e in verticale per gli altri.

Supponiamo invece $k = 4s+3$. Per i primi $4s$ passi, ci si può muovere in orizzontale in corrispondenza dei passi congrui a 1 o 2 modulo 4, e in verticale per gli altri, in modo da trovarsi $4s$ unità sopra la diagonale dopo $4s$ passi. Successivamente, ci si può muovere in orizzontale ai passi $4s+1$ e $4s+2$, e in verticale al passo $4s+3$, arrivando sulla diagonale.

I valori ammissibili di k sono quindi 79, 80, 83, 84, 87, 88, 91, 92, 95, 96, 99, 100, 103, 104, 107, 108. La risposta è quindi 0016.

11. Fraintendimenti *Giacomo Gallina*

«Per Odino, è stata dura!» esclama Stochastick, commentando gli ottimi risultati di Hilcup nell'arena di addestramento. Mentre parla con suo padre, Hilcup giocherella nervosamente con un foglio di carta quadrato $ABCD$ di lato 1 dm, appoggiato sul tavolo con la faccia bianca rivolta verso l'alto e quella nera verso il basso. Sui lati AB, BC, CD e DA sono segnati, rispettivamente, quattro punti E, F, G e H, tali che $AE = BF = CG = DH = \frac{1}{3}$ dm. Lasciando fermo il centro del foglio, Hilcup solleva il vertice A e piega il foglio lungo il segmento HE, portando A a toccare l'interno del quadrato. In modo analogo, piega poi il foglio lungo i segmenti EF, FG e GH, sollevando rispettivamente i vertici B, C e D e portandoli a contatto con l'interno del foglio. «Dovrei proprio essere a letto!» dice Hilcup sbadigliando, pur di non proseguire la conversazione con il padre. Quanti mm^2 misura l'area di carta nera visibile dall'alto?



Soluzione. Bisogna rendersi conto che non ci sono sovrapposizioni tra le pieghe del foglio. Infatti, detti A', B', C', D' i punti riflessi, per la piegatura si ha $\widehat{A'EA} = 2\widehat{AEH}$; inoltre, $\widehat{BEB'} = 2\widehat{BEF} = 2\widehat{AHE}$ (l'ultima uguaglianza segue dalla congruenza dei quattro triangoli piegati), da cui si deduce che $\widehat{BEB'}$ e $\widehat{AEA'}$ sono supplementari, e dunque E, A', B' sono allineati. Il ragionamento è analogo per le altre coppie di pieghe adiacenti.

Dunque l'area richiesta è 4 volte l'area di uno dei triangoli piegati (ad esempio AEH), cioè 4/9. Il risultato è la parte intera di $4/9 \cdot 10000$, cioè 4444.

12. Verso l'Isola dei Draghi — *Eugenio Trovarelli*

Stochastick, furioso per il comportamento del figlio durante l'esame finale, decide di salpare verso l'Isola dei Draghi con l'intenzione di eliminarli una volta per tutte. Per la spedizione prepara 9 imbarcazioni, numerate da 1 a 9, che dovranno procedere in fila indiana. Per evitare confusione durante la navigazione, impone però una regola: ogni nave il cui numero è divisibile per 3 deve avere immediatamente davanti a sé una nave con numero minore del proprio. In quanti modi diversi possono disporre le navi in fila?

Soluzione. La nave 3 può avere davanti solo la 2 o la 1, mentre per la 9 l'unica restrizione è che non sia in testa. Distinguiamo due casi in base alla nave che si trova davanti alla 6. Se questa è la 3, allora abbiamo un blocco 632 o 631, e poi dobbiamo ordinare questo blocco insieme alle rimanenti 6 navi (per un totale di 7 oggetti da ordinare). I possibili ordinamenti sono $7!-6!$, perché dobbiamo escludere quelli in cui la 9 è davanti; questo numero va moltiplicato per 2 per via dei due blocchi 632 e 631.

Se invece davanti alla 6 non c'è la 3, allora abbiamo un blocco $6m$ e un blocco $3n$, dove n è 1 o 2, e m è scelto nell'insieme $\{5,4,2,1\}$ da cui va rimosso n. Oltre a questi due blocchi, abbiamo altre 5 navi da ordinare, per un totale di $7!-6!$ ordinamenti. Questo numero va moltiplicato per $2\cdot 3=6$, cioè il numero di modi di scegliere n e poi m. Il totale è quindi $(2+6)\cdot(7!-6!)=34560$ e la risposta è 4560.

13. Corse tra draghi — *Giuseppe Mascellani*

Dopo la sconfitta della Morte Rossa, a Berkhoff è arrivata la pace: vichinghi e draghi vivono in armonia e, nel tempo libero, si divertono con uno sport chiamato *corse tra draghi*. In una partita si affrontano due squadre, che si sfidano in 5 manche. In ciascuna manche vengono liberate 5 pecore, e ogni pecora viene afferrata al volo da una e una sola squadra. La squadra che in una manche raccoglie più pecore vince la manche e ottiene 1 punto. Al termine delle 5 manche, vince la partita la squadra che ha totalizzato più punti. Nella partita odierna, la squadra di Nashtrid ha vinto contro quella di Moduloso; tuttavia, la squadra di Moduloso ha raccolto complessivamente più pecore di quella di Nashtrid. Quanti diversi tabellini finali sono possibili (con *tabellino finale* si intende la successione ordinata dei risultati delle 5 manche, ciascuno espresso come numero di pecore raccolte da ciascuna delle due squadre in quella manche)?

Soluzione. Si noti che la squadra di Nashtrid deve aver raccolto complessivamente almeno 9 pecore (vincendo almeno 3 manche, e quindi ottenendo almeno 3 pecore in ciascuna di queste); inoltre deve aver raccolto al massimo 12 pecore (meno della metà delle 25 totali). Elenchiamo le possibili sequenze di punteggi della squadra di Moduloso, tenendo presente che la somma deve essere almeno 13 e vi devono essere almeno 3 componenti ≤ 2: $(0,1,2,5,5)$, $(0,2,2,5,5)$, $(0,2,2,4,5)$, $(1,1,1,5,5)$, $(1,1,2,5,5)$, $(1,1,2,4,5)$, $(1,2,2,5,5)$, $(1,2,2,4,5)$, $(1,2,2,3,5)$, $(1,2,2,4,4)$, $(2,2,2,5,5)$, $(2,2,2,4,5)$, $(2,2,2,3,5)$, $(2,2,2,4,4)$, $(2,2,2,3,4)$, $(2,2,2,2,5)$, e tutte le permutazioni di esse. In totale le possibilità sono $3\cdot 10+3\cdot 20+4\cdot 30+5\cdot 60+1\cdot 5=515$.

Seconda parte: Oltre il cielo di Berkhoff

14. Prepararsi a essere Capo — *Eugenio Trovarelli*

Hilcup è appena rientrato da un volo di ricognizione con Stellato quando Stochastick lo richiama subito ai suoi doveri: «Lezione numero uno: il primo dovere di un Capo è verso il suo popolo. Vieni ad aiutare me e Scalarchio con questi 25 cittadini, numerati $1,2,\ldots,25$. Per non perdere tempo, ciascuno sarà assistito, ma da al più due persone tra me, te e Scalarchio». A fine giornata, i tre si accorgono che

- ognuno di loro ha assistito un numero pari di cittadini;
- preso l'insieme degli assistiti di ognuno, o esso o il suo complementare è costituito o da uno o più cittadini con numeri consecutivi;
- comunque si scelgano due tra loro, il numero di cittadini assistiti da entrambi è dispari.

In quanti modi diversi possono aver assistito i 25 cittadini?

Soluzione. Immaginiamo di porre i numeri $1,2,\ldots,25$ in cerchio. La seconda condizione allora dice che ciascuno dei tre assiste un sottoinsieme che rappresenta un arco di cerchio. La terza condizione dice che ogni coppia di archi si interseca in un sottoinsieme di cardinalità dispari (in particolare è non vuoto); questo unito alla prima condizione ci dice che ognuno assiste da solo un numero pari di di cittadini. L'ultima condizione è che non si possono sovrapporre contemporaneamente questi tre archi. Quindi il cerchio è diviso in 6 sezioni (le 3 sezioni servite da un'unica persona e le 3 sezioni servite da una coppia), di cardinalità alternativamente pari e dispari. Possiamo dunque iniziare da quelli serviti solo da Hilcup p_1 andando in senso orario e poi abbiamo dei numeri d_1, p_2, d_2, p_3, d_3 tali che $p_1 + d_1 + p_2 + d_2 + p_3 + d_3 = 25$ e p_i e d_i sono rispettivamente pari e dispari. Scrivendo $p_i = 2k_{2i-1}$ e $d_i = 2k_{2i} + 1$, abbiamo

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 11 \qquad 0 \leq k_i \leq 11.$$

Il numero di sestuple che verificano questa uguaglianza si può determinare contando gli anagrammi di 11 palline e 5 segni "+" che sono $\binom{11+5}{5} = 4368$. Bisogna poi moltiplicare questo numero per 2 (le possibilità di scelta del primo arco incontrato in senso orario) e per 25 (la selta del primo cittadino assistito solo da Hilcup). Quindi il risultato è 218400.

15. Calcolatrice vichinga *Nikita Deniskin*

Eret(eret) è un cacciatore di draghi al soldo dello spietato Drago Burnsvist. Dopo aver catturato Nashtrid, Γ(pesce) e i gemelli Θ(tufo) e Θbruta insieme ai loro draghi, vuole stabilire a quanto venderli al suo padrone. Per farlo, parte da sei numeri a, b, c, x, y, z e deve calcolare i valori delle seguenti espressioni:

$$2ay + 2bx + 2cy + 2bz;$$

$$az + bz + cz + cy + cx.$$

Purtroppo Eret(eret) non sa fare calcoli a mente e deve usare una calcolatrice vichinga, che permette soltanto di inserire due numeri alla volta ed eseguire un'operazione tra addizione, sottrazione e moltiplicazione. Tuttavia, egli ha un'ottima memoria e può riutilizzare come input qualunque risultato ottenuto in precedenza. Ogni addizione o sottrazione consuma 4 Odinowatt, mentre ogni moltiplicazione ne consuma 23. Quanti Odinowatt consumerà al minimo Eret(eret) per calcolare entrambe le espressioni?

Soluzione.

Mostriamo prima che 109 Odinowatt bastano. Calcoliamo

$$s = a + b, \qquad u = x + y,$$

poi

$$S = s + c = a + b + c, \qquad U = u + z = x + y + z.$$

Facciamo quindi le due moltiplicazioni

$$P = SU = (a + b + c)(x + y + z), \qquad Q = su = (a + b)(x + y).$$

Ora calcoliamo

$$V = b - a - c, \qquad W = x - y + z,$$

usando due operazioni per ciascuno, e facciamo la terza moltiplicazione

$$R = VW = (-a + b - c)(x - y + z).$$

A questo punto si verifica direttamente che

$$P + R = 2ay + 2bx + 2cy + 2bz$$

e

$$P - Q = az + bz + cz + cy + cx.$$

Abbiamo usato 3 moltiplicazioni e 10 addizioni o sottrazioni, per un costo totale di

$$3 \cdot 23 + 10 \cdot 4 = 69 + 40 = 109.$$

Resta da capire perché non si può fare meglio. Questa è la parte più delicata del problema: una dimostrazione completamente formale richiederebbe di distinguere vari possibili schemi di calcolo. Diamo qui l'argomento elementare che spiega il vincolo essenziale.

Osserviamo prima di tutto una proprietà molto semplice dei prodotti. Se moltiplichiamo una combinazione lineare di a, b, c per una combinazione lineare di x, y, z, per esempio

$$(\alpha a + \beta b + \gamma c)(\lambda x + \mu y + \nu z),$$

allora i coefficienti dei monomi formano dei rettangoli. Più precisamente, se guardiamo due lettere tra a, b, c e due lettere tra x, y, z, il prodotto dei coefficienti su una diagonale del rettangolo è uguale al prodotto dei coefficienti sull'altra diagonale. Per esempio

$$[ax]\,[by] = [ay]\,[bx],$$

dove $[m]$ indica il coefficiente del monomio m.

Questa proprietà mostra subito che due moltiplicazioni non possono bastare. Se bastassero due moltiplicazioni, i due prodotti ottenuti dovrebbero generare le due espressioni finali. In particolare qualche combinazione lineare non nulla delle due espressioni dovrebbe essere un singolo prodotto come sopra. Consideriamo quindi

$$\lambda(2ay+2bx+2cy+2bz)+\mu(az+bz+cz+cy+cx).$$

Guardando i coefficienti di ax, ay, bx, by, otteniamo rispettivamente

$$0, \qquad 2\lambda, \qquad 2\lambda, \qquad 0.$$

La proprietà del rettangolo darebbe

$$0 \cdot 0 = (2\lambda)(2\lambda),$$

quindi $\lambda = 0$. Rimane allora solo un multiplo della seconda espressione. Ma guardando i coefficienti di ax, az, cx, cz, otteniamo

$$0, \qquad \mu, \qquad \mu, \qquad \mu,$$

e la proprietà del rettangolo darebbe

$$0 \cdot \mu = \mu \cdot \mu,$$

quindi anche $\mu = 0$. Dunque nessuna combinazione lineare non nulla delle due espressioni è un singolo prodotto, e servono almeno tre moltiplicazioni.

Supponiamo ora di usare tre moltiplicazioni. Per spendere meno di 109 Odinowatt, dopo le tre moltiplicazioni potremmo usare al massimo 9 addizioni o sottrazioni. Poiché alla fine dobbiamo ottenere due espressioni diverse, almeno due operazioni servono solo per combinare i prodotti finali. Quindi rimangono al massimo 7 operazioni per costruire tutti i fattori da moltiplicare.

Con tre prodotti, il modo più economico possibile è che un prodotto venga usato in entrambe le espressioni, mentre gli altri due servano a completare separatamente la prima e la seconda. Dai coefficienti si è allora forzati a prendere come prodotto comune

$$(a+b+c)(x+y+z).$$

Infatti questo è l'unico prodotto che può contenere simultaneamente tutti i monomi che compaiono nelle due espressioni, senza rompere la proprietà dei rettangoli quando poi si sottraggono gli altri prodotti.

A quel punto gli altri due prodotti sono determinati:

$$2ay+2bx+2cy+2bz-(a+b+c)(x+y+z) = (-a+b-c)(x-y+z),$$

mentre

$$(a+b+c)(x+y+z)-(az+bz+cz+cy+cx) = (a+b)(x+y).$$

Quindi, se vogliamo usare solo tre moltiplicazioni, dobbiamo costruire i tre fattori

$$a+b, \qquad a+b+c, \qquad -a+b-c$$

e i tre fattori

$$x+y, \qquad x+y+z, \qquad x-y+z.$$

Per costruire i primi tre servono almeno 4 addizioni o sottrazioni. Infatti, da $a+b$ si ottiene $a+b+c$ con una sola operazione, ma per ottenere anche $-a+b-c$ servono ancora due cambiamenti indipendenti, uno sul coefficiente di a e uno sul coefficiente di c. Allo stesso modo servono almeno 4 operazioni per costruire

$$x+y, \qquad x+y+z, \qquad x-y+z.$$

Dunque servono almeno 8 operazioni per costruire i fattori e almeno 2 operazioni finali per combinare i prodotti. Con tre moltiplicazioni servono quindi almeno 10 addizioni o sottrazioni.

Infine, usare quattro moltiplicazioni non può convenire: quattro moltiplicazioni costano già

$$4 \cdot 23 = 92,$$

e per stare sotto 109 rimarrebbero al massimo 4 addizioni o sottrazioni. Ma almeno due servono alla fine per ottenere le due espressioni, e con le rimanenti due non si riescono nemmeno a costruire fattori abbastanza ricchi da contenere tutte le sei variabili necessarie.

Il costo minimo è quindi

$$3 \cdot 23 + 10 \cdot 4 = 109.$$

16. Per ogni mar navigherò ***Davide Averoldi***

Stochastick fischetta una melodia che viene subito riconosciuta da Valgebra, che inizia a cantare:

> *«Per ogni punto a coordinate intere del piano cartesiano io navigherò,*
> *e ciascuno di essi colorerò senza paura:*
> *se due punti disteranno proprio* $6767 \cdot 7676$ *unità, lo stesso colore a essi darò.*
> *Qual è il massimo numero di colori che usare potrò?»*

Soluzione. Sia $N = 6767 \cdot 7676 = 101^2 \cdot 67 \cdot 2^2 \cdot 19$.

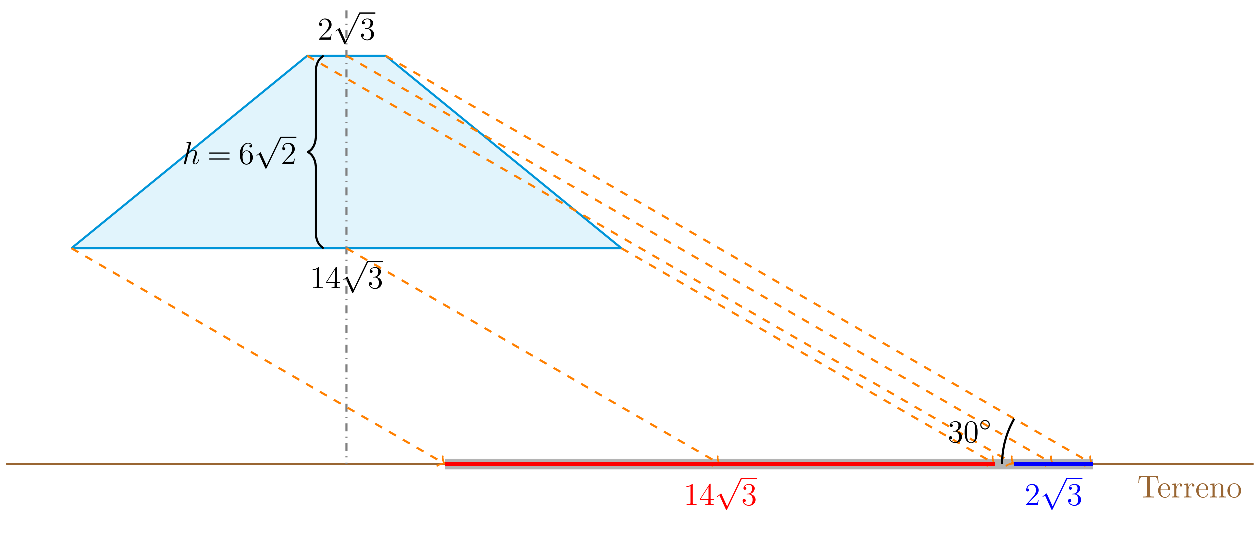
Notiamo che per ogni $p \mid N$ e $p = 2$ o $p \equiv 3$ modulo 4, se due punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) a coordinate intere distano N, allora $x_1 \equiv x_2$ e $y_1 \equiv y_2$ modulo p. Ciò è dovuto al ben noto fatto che se $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = N \equiv 0$ modulo p (o modulo 4 se $p = 2$), allora entrambi i quadrati sono nulli modulo p, altrimenti si avrebbe $(x_1 - x_2)^2 \cdot (y_1 - y_2)^{-2} \equiv -1$, cioè $4 \mid \phi(p)$ (o $4 \mid \phi(4)$). Sia dunque $M = 67 \cdot 2^2 \cdot 19$; ciò implica che tutte le coppie di resti (x, y) con $x, y \in \{0, 1, \ldots, M-1\}$ possono avere sempre colori distinti.

Rimane da dimostrare che se (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono punti tali che $x_1 \equiv x_2$ e $y_1 \equiv y_2$ modulo M, allora devono avere lo stesso colore. Per farlo basta dimostrare che esiste un cammino fra alcuni dei punti a coordinate intere del piano composto interamente di passi lunghi N. Poiché è tutto multiplo di M, il problema è ricondotto a dimostrare che utilizzando solo passi lunghi 101^2 è possibile spostarsi dal punto $(0, 0)$ al punto $(1, 0)$. Osservato che $99^2 + 20^2 = 101^2$, deduciamo che è possibile spostarsi da $(0, 0)$ a $(99, 20)$, e a $(20, 99)$, dunque anche a $(99 \cdot 20 - 20 \cdot 99, 20 \cdot 20 - 99 \cdot 99) = (0, -9401)$, dunque anche a $(0, -8)$, dunque anche a $(0, 96)$, dunque anche a $(0, 5)$ e infine a $(0, 3)$, $(0, 2)$ e $(0, 1)$.

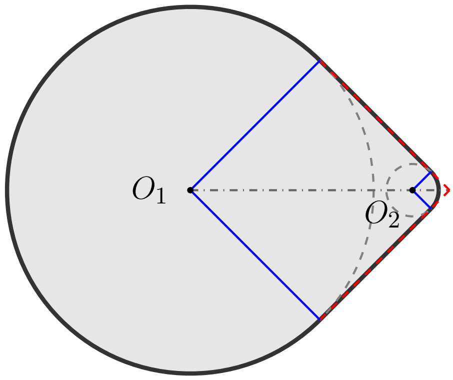
La risposta è, pertanto, il numero di coppie di resti (x, y) modulo M, cioè $M^2 = (67 \cdot 76)^2 = (2592)8464$.

17. Tranello ghiacciato ***Lorenzo Cortesi***

Stellato è tornato in sé e, insieme a Hilcup, sta combattendo contro Drago Burnsvist. «Ormai è finita!» urla Hilcup rivolto al nemico. «Davvero?» ribatte Drago Burnsvist, proprio mentre la Grande Bestia Selvaggia intrappola Hilcup e Stellato in un blocco di ghiaccio a forma di tronco di cono di altezza $6\sqrt{2}$ *m*, i cui raggi delle basi inferiore e superiore misurano rispettivamente $7\sqrt{3}$ *m* e $\sqrt{3}$ *m*. Nel momento in cui vengono intrappolati, Hilcup e Stellato sono in volo, per cui la base superiore del tronco di cono si trova a un'altezza di 180 *dm* dal terreno. Inoltre, l'asse del tronco di cono è perpendicolare al terreno, che è perfettamente orizzontale. Sapendo che i raggi del Sole, considerati paralleli tra loro, formano un angolo di 30° con il suolo, quanti m^2 misura l'area dell'ombra del blocco di ghiaccio proiettata sul terreno?



Soluzione. Proiettando le componenti della figura notiamo che il cerchio di base del blocco di ghiaccio va in un cerchio sempre di raggio $7\sqrt{3}m$ e allo stesso modo succede per il cerchio di base superiore, che va in un cerchio di raggio sempre $\sqrt{3}m$. Invece per trovare la distanza tra i centri dobbiamo poiettare l'altezza del tronco di cono, che è $6\sqrt{2}m$, con un angolo di 30° che risulterà in una distanza tra i centri di $6\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = 6\sqrt{6}$,. Ora uniamo i due cerchi tramite i loro segmenti di tangenza comuni esterni come in figura e tracciamo i raggi che congiungono i centri ai punti di tangenza. Chiamiamo X_1 e X_2 le proiezioni di O_2 sui due



raggi della circonferenza più grande. Allora il triangolo rettangolo $O_1O_2X_1$ ha ipotenusa $6\sqrt{6}m$ e O_1X_1 pari alla differenza dei raggi $6\sqrt{3}m$. Ma allora $O_1X_1O_2X_2$ risulta essere un quadrato di lato $6\sqrt{3}m$. L'area totale dell'ombra è dunque l'area di questo quadrato sommata a $\frac{3}{4}$ dell'area del cerchio grande, $\frac{1}{4}$ dell'area del cerchio piccolo e i due rettangoli rimanenti di lati $6\sqrt{3}m$ e $\sqrt{3}m$:

$$A_{tot} = \frac{3}{4}\pi(7\sqrt{3})^2 + \frac{1}{4}\pi(\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{3})^2 + 2\cdot 6\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 111\pi + 144 = 482,72...$$

18. Il Capo è tornato a casa *Lorenzo Degli Atti*

È giunto il momento di proclamare il nuovo Capo di Berkhoff! L'anziana Gödhi dà inizio alla cerimonia tracciando con del carbone, sulla fronte di Hilcup, il polinomio

$$p(x) = x^{15} - 2x^{14} + 2x^{13} - x^{12} + x^{11} - 2x^{10} + 2x^9 - x^8 + x^7 - 2x^6 + 2x^5 - x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1.$$

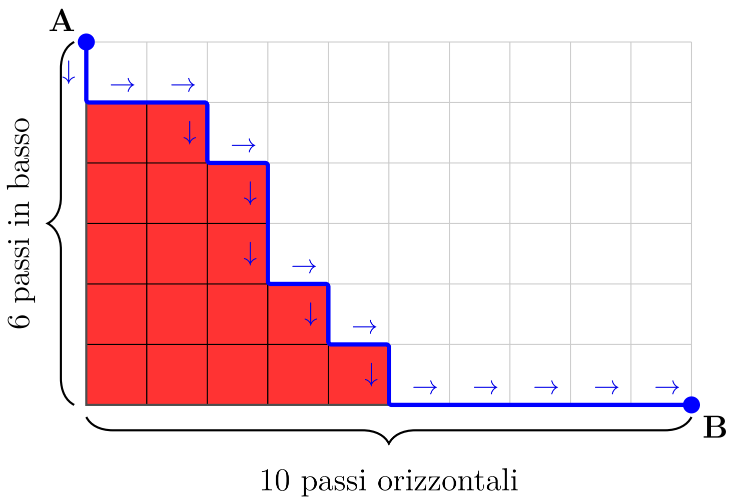
Solo chi è davvero degno di questo titolo è capace di calcolare la somma delle potenze 16-esime di tutte le radici di $p(x)$, comprese quelle complesse. Quanto vale tale somma?

Soluzione. Notiamo che $p(x)(x+1) = x^{16} - x^{15} + x^{13} - x^{11} + x^9 - x^7 + x^5 - x^3 + x - 1$ e $p(x)(x+1)(x^2+1) = x^{18} - x^{17} + x^{16} - x^2 + x - 1 = (x^2 - x + 1)(x^{16} - 1)$. Da ciò deduciamo che tutte le radici complesse di $p(x)$ sono radici di $x^{16} - 1$ eccetto le due radici di $x^2 - x + 1$ (che invece sono radici di $x^3 - 1$). Per le prime 13, la somma delle potenze 16-esime vale 13, mentre per le altre 2 radici z, ricordando che $z^3 = 1$ e dunque $z^{16} = z$, vale come la somma delle radici di $x^2 - x + 1$, cioè -1. Da cui la risposta è $13 - 1$.

19. Ala ignifuga *Eugenio Trovarelli*

Stellato si è innamorato di una *Fourier Chiara*, che però non va affatto d'accordo con gli umani. Hilcup capisce che è arrivato il momento di lasciarlo volare anche senza di lui e decide di rivestire l'ala artificiale con pelle di drago, così da renderla ignifuga. L'ala è una griglia 6×10 di caselle quadrate, composta da 6 righe e 10 colonne. I ritagli di pelle di drago sono a forma di trimino ($\square\square\square$ oppure $\boxplus$, in una qualunque rotazione). Hilcup riveste l'ala a partire dall'angolo in basso a sinistra, cucendo un ritaglio alla volta, senza sovrapporli. Per facilitare il lavoro, ogni casella coperta da un ritaglio appena cucito deve soddisfare la seguente condizione: la casella immediatamente sotto, se esiste, e la casella immediatamente a sinistra, se esiste, devono essere coperte dal ritaglio appena cucito oppure da un ritaglio cucito in precedenza. In quanti modi Hilcup può rivestire l'intera ala, tenendo conto anche dell'ordine in cui i ritagli vengono cuciti? *Dare come risposta la somma dei primi che dividono la soluzione, contati con molteplicità; ad esempio, se la risposta fosse* $12 = 2^2\cdot 3$, *dare come risposta* $2\cdot 2 + 3 = 7$.

Soluzione. Prima e dopo la cucitura di ogni pezzo, il perimetro dell'ala corrisponde a un percorso monotono che, partendo dall'angolo in alto a sinistra, arriva all'angolo in basso a destra. Ogni tale percorso è esprimibile come sequenza di 6 movimenti verticali V e 10 movimenti orizzontali O (segnati rispettivamente con $\downarrow$ e $\rightarrow$ in figura).



Un'utile osservazione è che ogni mossa modifica la sequenza di movimenti scambiando esattamente due movimenti che distano sempre 3 e sempre cambiando la sequenza $V \cdot \cdot O$ in $O \cdot \cdot V$ (e viceversa). Ciò significa che i movimenti in posizione $\equiv 0$, $\equiv 1$ e $\equiv 2$ modulo 3 sono indipendenti. Nei 3 casi abbiamo che le sequenze, inizialmente $VVOOOO$, $VVOOO$ e $VVOOO$, devono divertare rispettivamente $OOOOVV$, $OOOVV$ e $OOOVV$, uno scambio alla volta fra due lettere consecutive VO che diventano OV. Ci sono 14 modi per trasformare la prima sequenza e 5 modi per le altre due. Poiché sulla prima sequenza usiamo 8 cuciture, sulla seconda 6 e sulla terza 6, deduciamo che il numero totale di modi in cui rivestire l'ala è $14 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \binom{8+6+6}{8,6,6} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ da cui $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 11 + 13 + 17 + 19 = 103$.

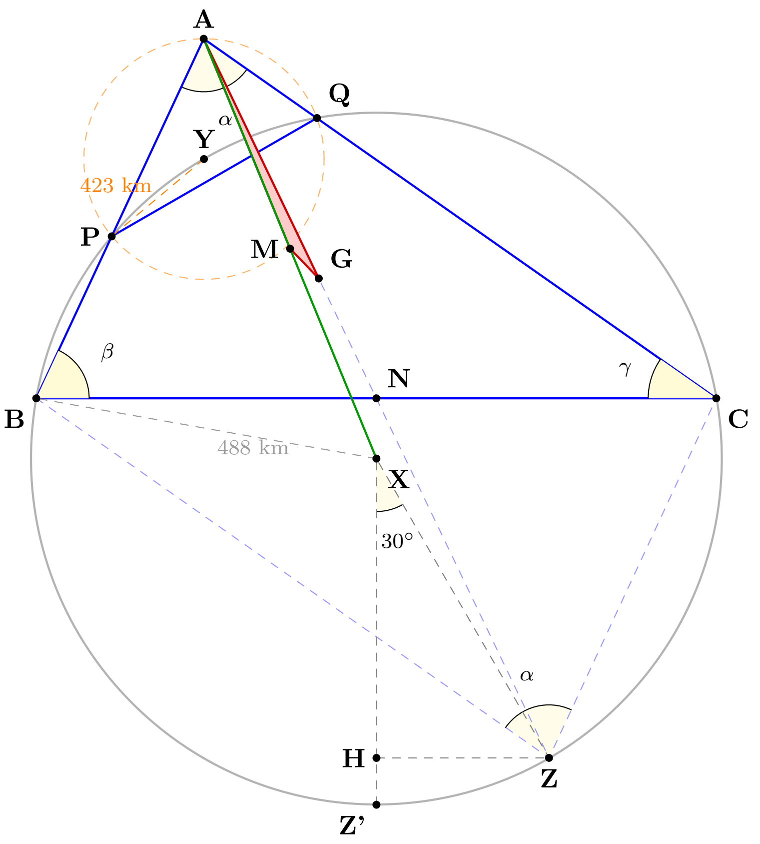
20. Il Mondo Nascosto — ***Francesco Laganà***

Gli abitanti di Berkhoff stanno studiando un'antica mappa che, secondo la leggenda, conduce al *Mondo Nascosto*. Su di essa è tracciato un triangolo ABC, con $AC > AB$, tale che $\widehat{ABC} = \widehat{BCA} + 30°$. Le istruzioni per raggiungere il Mondo Nascosto sono riportate in una nota: «Considera il punto Z, simmetrico di A rispetto al punto medio di BC. Traccia quindi la circonferenza ω circoscritta al triangolo BCZ; le rette AB e AC intersecano nuovamente ω rispettivamente nei punti P e Q. Siano inoltre X il centro di ω, Y il circocentro del triangolo APQ e M il punto medio di AX. Il Mondo Nascosto è rappresentato dal triangolo AGM, dove G è il baricentro di ABC». Nella mappa sono indicate anche le lunghezze reali di due segmenti: $XB = 488$ *km* e $YP = 423$ *km*. Per quanti *km*^{2} si estende il Mondo Nascosto?

Soluzione. Chiamiamo α, β, γ gli angoli di ABC rispettivamente in A, B e C. Inoltre chiamiamo $R = 488$ il raggio di ω e $r = 423$ il raggio della circonferenza circoscritta ad APQ. Usando il teorema della mediana si ha $A_{AGM} = \frac{2}{3} A_{ANM}$, inoltre poiché M è punto medio di AX si ha $A_{ANM} = \frac{1}{2} A_{ANX}$. Quindi $A_{AGM} = \frac{1}{3} A_{ANX}$. Mi calcolo $A_{ANX} = \frac{1}{2} NX \cdot h_{NX}$. Ora mi basta calcolare queste ultime due quantità.

- L'altezza h_{NX} del triangolo ANX relativa ad NX è pari alla distanza di A dalla retta NX, ma essa è anche la distanza di Z dalla stessa retta poiché A e Z sono simmetrici rispetto ad N. Prolungando NX fino ad incontrare ω in Z', si ha che Z' è il punto medio dell'arco BC che non comprende A:
$$\widehat{ZXZ'} = 2\widehat{ZBZ'} = 2(\widehat{CBZ'} - \widehat{CBZ}) = 2\left(\frac{\beta+\gamma}{2} - \gamma\right) = \beta - \gamma = 30°.$$
Ma allora $d(Z, NX) = d(Z, Z'X) = ZH = ZX \cdot \sin(30°) = R/2$.
- Dal triangolo rettangolo NXB abbiamo $NX = R \cdot \cos(\widehat{NXB}) = R \cdot \cos(\alpha)$. Ma per il teorema dei seni applicato alle due circonferenze con la corda comune QP si ha
$$2r\sin(\alpha) = QP = 2R\sin(180 - 2\alpha).$$
Quest'ultima relazione vale poiché
$$\widehat{QZP} = \widehat{CZP} + \widehat{QZB} - \widehat{CZB} = \widehat{PBC} + \widehat{QCB} - \widehat{CZB} = \beta + \gamma - \alpha = 180° - 2\alpha$$
Ma allora, deduciamo che $\cos(\alpha) = \frac{r}{2R}$ e dunque $NX = \frac{r}{2}$.

Quindi l'area risulta essere $A_{AGM} = \frac{1}{24} Rr = 8601$.



21. Addio ***Filippo Falqui Cao***

«La leggenda dice che, quando la terra trema o sputa fuori lava, sono i draghi che ci ricordano che esistono ancora...», pensa Hilcup, osservando un'ultima volta lo stormo di draghi allontanarsi nel cielo. «Il mondo crede che non esistano quattro interi positivi consecutivi con lo stesso numero di divisori, ma noi Berkhoffiani sappiamo che non è così, e custodiremo questo segreto finché non verrà il tempo in cui i draghi potranno tornare in pace». Qual è il minimo valore possibile della somma di questi quattro interi?

Soluzione. Sia d il numero di divisori dei quattro interi consecutivi richiesti. Notiamo che d non può essere dispari perché non esistono 4 quadrati consecutivi. Non può essere 2 perché non esistono 4 primi consecutivi. Non può neanche essere 4 perché gli unici interi ad avere 4 divisori positivi sono della forma pq e p^3 con $p \neq q$ primi, ma, osservando i due interi pari fra i quattro consecutivi, uno deve essere multiplo di 4, quindi deve essere $p^3 = 8$, ma i due interi consecutivi (7 e 9) non hanno 4 divisori. Dunque nessuno dei 4 interi può essere primo, né prodotto di due primi (distinti o meno).

Ciò significa che la fattorizzazione di ognuno dei quattro interi deve contenere almeno 3 fattori primi (non necessariamente distinti). Siccome due dei quattro interi consecutivi devono essere dispari e almeno uno di questi non può essere multiplo di 3, questo deve essere ricercato fra quegli interi aventi almeno 3 fattori primi maggiori di 3 (e non possono essere tutti e 3 uguali).

Dopo aver escluso $n = 5^2 \cdot 7$, si osserva infine che $n = 5 \cdot 7^2$ funziona perché $242 = 2 \cdot 11^2$, $243 = 3^5$, $244 = 2^2 \cdot 61$ e $245 = 5 \cdot 7^2$ sempre con $d = 6$ divisori positivi distinti. La risposta è dunque $242 + 243 + 244 + 245$.

Soluzioni

Nr.	Problema	Soluzione
1	... i draghi!	0200
2	Fourier Buia	0000
3	Quello scudo è mio!	0120
4	Ala artificiale	0030
5	L'Orripilante Biiezione	2754
6	Mancato!	0030
7	Cronache di Berkhoff	4568
8	Sbuffo infuocato	0004
9	Figlio di un mezzo troll	0122
10	In volo	0016
11	Fraintendimenti	4444
12	Verso l'Isola dei Draghi	4560
13	Corse tra draghi	0515
14	Prepararsi a essere Capo	8400
15	Calcolatrice vichinga	0109
16	Per ogni mar navigherò	8464
17	Tranello ghiacciato	0492
18	Il Capo è tornato a casa	0012
19	Ala ignifuga	0103
20	Il Mondo Nascosto	8601
21	Addio	0974